Johannis Wallisii, SS. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS

SAVILIANI in Celeberrimâ

Academia OXONIENSI,

ARITHMETICA INFINITORUM,

SIVE

Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheseos Problemata.

OXONII,

Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,

Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1656.

Clarissimo Spectatissimoq; Viro
Matheseos Peritissimo,
D. GULIELMO OUGHTREDO,
Ecclesiæ quæ est Aldeburiæ, in agro Surriensi, Rectori. S.

EN tibi tandem (Vir Clarissime) jam absolutum opus illud cujus spem fecit Propositio ea Cyclometrica, quam sub Paschatis festo Typis excusam tibi dicavi. Quod cum, pro more, ubi in publicum prodeat, alicui inscribendum sit, non tam Virum magnum quam magnum Mathematicum quærendum putavi, cui illud inscriberem. Adeoq; non alii cuiquam quam tibi magis illud deberi facile perspexi; qui & a Mathesi optime meritus es, & cujus scriptis me profecisse lubens agnosco: quippe qui in tua Clave Mathematicæ, *opere licet non magno, ea breviter simul et perspicuè tradidisti, quæ magnis aliorum voluminibus frustra quæsitemus.*

Opus hoc invenies (siquid ego judico) plane novum. Cur enim ita non vocitem nihil video: nec alii credo id inficias ibunt. Quamvis enim non dubitandum sit, quin propositiones aliis cognitæ sparsim immisceantur, (quod necessario faciendum erat, partim ut inde ad alia lux affulgeat, neq; videar aliquid comminisci, quod Mathesi jam inventæ atq; excultæ nihil habeat affine; partim etiam ne hoc ipsum opus mutilum prodiret & mancum, cùm illæ ex principiis nostris ita statim consequantur ut eti-

amsi alias ignotæ essent necesse sit ut hinc statim innotescant; & quidem ex earum illustrioribus plerasq; non apud alios prius sciverim exstare quam ad eas methodo hac pervenerim:) cum tamen & nova multa, aliis nec inventa nec cogitata quidem, habeat; atq; omnia novâ methodo a nobis primitùs in Geometriam introductâ, tradat; eaq; (nisi meis fortasse nimis faveam) perspicuitate quâ in abstrusioribus hisce problematis nemo (quod sciam) usus est; Non est cur novum dubitem appellare.

Nempe inde ortum sumit hæc nostra methodus ubi Cavallerii methodus Indivisibilium *desinit. Unde etiam & operi ipsi, ipsiq; titulo, ansa data est; ut enim ille suam,* Geometriam Indivisibilium, *ita Ego methodum nostram,* Arithmeticam Infinitorum, *nominandam duxi.*

Quomodo autem ego huc pervenerim; licet id minus videatur dictu necessarium, cum omnia eâ fere methodo scripta sint quâ inventa; tamen, quoniam id tibi non ingratum fore judico, istius etiam rei historiam breviter contexam.

Exeunte Anno 1650 *incidi in Torricellii scripta Mathematica, (quæ ut per alia negotia licuit, anno sequente* 1651, *evolvi) ubi inter alia, Cavallerii* Geometriam Indivisibilium *exponit. Cavallerium ipsum nec ad manum habui, & apud Bibliopolas aliquoties frustra quæsivi. Ipsius autem methodus, prout apud Torricellium traditur, mihi quidem eò gratior erat quòd nescio quid ejusmodi ex quo primùm fere Mathesem salutaverim animo obversabatur; quod enim de circulo apud plerosq; obtinet, (qui pro infinitorum laterum polygono haberi solet, adeoq; Peripheria pro rectis infinitis infinitè brevibus;) visum erat mihi, mutatis mutandis, etiam alibi non inutiliter accommodari posse; & quidem eo*

spectare

spectare non pauca quæ apud Euclidem, Apollonium, & præsertim Archimedem passim exstant. Erant autem ea non nisi confusa adhuc apud me cogitata quæ nondum in ordinem redegeram. Neq; enim per alia licuit negotia, Mathesi animum ex professo applicare, sed ei saltem horis nonnunquam subcisivis indulgere; priusquam aliunde ad hanc quam jam subeo provinciam vocatus fuerim; quod non ita multo priùs contigerat.

Ubi hujusmodi jam obtinuisse methodum persenseram; cogitare apud me cepi, num non hinc aliquid de circuli quadratura, quam summos semper viros exercuisse notum est, luminis accedat. Quod spem facere videbatur, hoc erat. Infinitorum Coni circulorum, ad totidem Cylindri, ratio jam erat cognita, nempe ut 1 ad 3; eorum autem diametri omnes in triangulo per axem coni, ad totidem in parallelogrammo per axem cylindri, sunt (uti notum est) ut 1 ad 2. Pariter in Conoide parabolico circulos omnes ad totidem in cylindro circulos notum erat rationem habere 1 ad 2; eorum autem omnes diametros ad diametros horum esse ut 2 ad 3. Manifestum etiam erat rectas trianguli esse Arithmeticè proportionales, sive ut 1, 2, 3, &c. ergo circulos coni (in diametrorum ratione duplicata) ut 1, 4, 9, &c. Item circulos Conoidis parabolici (in duplicata ratione ordinatim-applicatarum, hoc est, in ratione diametrorum,) ut 1, 2, 3, &c. ergo eorũ diametros ut $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. quippe in circulorum suorum ratione subduplicata. Fieri igitur posse sperabam, ut aliàs etiam ex cognita ratione quam habeat series circulorum, sive (quod eodem recidit) quadratorum, ad totidem æqualia; inveniri posset & quam habent rationem eorum vel diametri vel latera ad æqualia totidẽ Hoc autem si universali aliqua methodo invenire possẽ, de circuli quadratura satis prospectũ esset. Cum enim jam notum erat, parallelos omnes in sphæra circulos, ad totidem in

Cylindro, esse ut 2 ad 3; si inde cognosci posset quam habeant omnes eorum diametri ad diametros horum, inventum foret quod quæritur; nempe Circulum illæ, hæ Quadratum diametri constituunt. Reducto ita problemate Geometrico ad purè Arithmeticum.

Huic igitur inquisitioni, istius anni 1651 *fine, & initio sequentis* 1652, *me applicui; ea plane methodo quam indicat hic Tractatus: opinatus vel inde constare aliquando posse quomodo quadrandus esset circulus, vel forte ne quidem quadrandum esse, vel saltem aliquid hinc emersurum esse quod operæ esset pretium.*

Aggressus igitur sum primo (ut a simplicioribus inchoem) series simplices, puta quantitatum Arithmeticè proportionalium, vel in earum ratione duplicata, triplicata, &c. deinde & subduplicata, subtriplicata, &c. atq; ex his composita, puta, subduplicatæ triplicata, &c. aut etiam qualitercunq; multiplicata, vel juxta denominationem rationalem aut etiam irrationalem. In quibus omnibus res plane quidem ex voto & supra spem successit. Unde Theorema tandem generale emersit, Prop. 64. traditum. Sed & quadraturam simul reperi non modo Parabolæ nova methodo præstandam, sed & Paraboloidum omnium, eorumq; complementorum, quod nemo antea, quod sciam, aggressus erat, nedum assecutus. Adeoq; hinc statim Geometriam auctam persensi; cum enim antea ex figuris curvilineis sola fere parabola quadraturam nacta erat, jam paraboloidum omnium infinita genera unâ quidem & generali methodo unica propositio quadranda doceat. Et quidem si unius Parabolæ quadratura Archimedem tantum nobilitaverit, (ubi omnes deinceps Mathematici ex eo tempore substiterunt tanquam ad Herculis columnas;) gratum illud orbi Mathematico futurum satis præsensi, si etiam ejusmodi figurarum infinita genera quadranda doceam. Sed & Conoidum item & Pyramidoidum

dum

dum doctrinam hinc ampliatam vidi. Cum enim Archimedes ex Conoidibus & Sphæroidibus sola recta tractaverit (ut & post illum alii) de Pyramidoidibus ne quidem mentione facta; ego illa omnia sive Conoidea sive Pyramidoidea tam recta quam inclinata ad Cylindros & Prismata redegi. Nec ea tantum quæ ex Parabolis, sed & quæ ex Paraboloidibus omnibus eorumve complementis formantur, de quibus altum hucusq; apud omnes silentium, nec quicquam (quod sciam) uspiam tentatum. Sed & totam fere de Spiralibus doctrinam hinc etiam vidi directâ posse consequentiâ derivari: Et quidem non modo spatia spiralibus adjacentia (quod fecit Archimedes) cum circulo comparanda docui, sed & lineam ipsam spiralem cum peripheria, quod nemo antehac (quod sciam) aggressus est, nedum præstitit. Et propterea siquis spirali rectam æqualem dederit (~~quod aliqui se fecisse somniarunt~~) Peripheriam item utrivis æqualem datam iri non dubito; adeoq; & circuli quadraturam vel sic perfectam esse. Sed & ipsam spiralium doctrinam, non minus quam Parabolarum & Paraboloidum, ampliâsse proclive erat, nisi quod nollem ad Corollaria nimis exspatiari.

Transii deinde ad series auctas (quas voco) & diminutas sive mutilatas; quæ ex duarum pluriumve serierum vel aggregatis vel differentiis constant. Atq; hic etiam successum minime contemnendum reperi. Nempe eas omnes ad series æqualium redigere non erat difficile; adeoq; Conoidea & Sphæroidea, vel etiam Pyramidoidea, non modo recta sed & inclinata, ad Cylindros & Prismata redigere rem nullius esse negotii perspexi: neq; ea tantum quæ ex Hyperbolis & Ellipsibus fiant, sed & quæ ex Hyperboloidibus vel Elliptoidibus mille modis formari possent; verum eis sigillatim recensendis immorandum esse non duxi, ne nimis divagarem, præsertim cum illud qui fieri possit nemo non ex traditis suo marte perspiciat.

De

De seriebus autem istis sive auctis sive diminutis non ipsis solum, sed & quæ in earum ratione duplicata, triplicata, aut ulterius multiplicata procedunt, eandem inquisitionem eodem successu continuavi; uti ex iis quæ deinceps sequuntur propositionibus videndum est. Ubi simul numerorum figuratorum, puta triangularium, pyramidalium, &c. (quorum nullus vel exiguus hactenus usus fuerit, & fere ludicrus,) usus insignes ex insperato deteguntur.

Verum ubi de seriebus aliis quæ sint in istarum auctarum vel diminutarum ratione subduplicatâ, subtriplicata, &c. proximè agendum erat, (quod Circuli, Ellipseos, & Hyperbolæ quadraturam directè quidem & immediate spectabat, & quæ sola jam superfuit difficultas:) videbam illic aquam hærere, neq; ita facilè ac in prioribus me extricare posse. Re igitur variis modis tentata, nec eo tamen exitu qui votis omnino satisfaceret; eo deventum erat ut crederem rationem illam quæ quærebatur ejusmodi esse quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus surdis esset explicabilis. Numerorum enim progressiones aliquot inveni inter quarum datos terminos alius erat interponendus, ut rationem quæsitam valeam exprimere. Eas autem progressiones tales esse ut nec Arithmeticæ dici possint (ubi augmenta continua sunt æqualia,) nec Geometricæ (ubi numeri continue multiplicantes sunt æquales,) sed tales quæ continuos multiplicatores habeant arithme[illegible]e proportionales, adeoq; magis adhuc sint compositæ [illegible]m Geometricæ. Si autem in Geometrica progressione, [illegible]tinui multiplicatores sunt æquales,) quamvis [illegible] fieri posit (verbi gratia, in 1, 4, 16, 64, &c.) [illegible]di terminis illius medii sint numeris expli[illegible] omnibus (puta in 1, 2, 4, 8, &c.) id [illegible]t numerum impossibilem ut-

indicemus, (puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, *&c:) multò minus sperandum fore judicavi, ut in progressione magis adhuc composita (ubi continui multiplicatores sint continuè vel crescentes vel decrescentes) id semper fieri possit; adeoq; alium aliquem notationis modum (quam qui adhuc receptus est) inducendum putavi quo numerus ille impossibilis indicetur.*

Atq; hactenus perveneram istius anni 1652 *initio, tempore (si memini) quadragesimali; quo tempore nempe, per Academiæ nostræ constitutiones, a publicis prælectionibus feriari permissum est, adeoq; privatis disquisitionibus magis vacare.*

Dum autem hic hærebam, placuit rem aliis quibus familiariter usus sum viris Mathematicis communicare, ut videam num illi auxilio esse possint in quæsita quantitate designanda. Adeoq; ex variis quas apud me conceperam ejusmodi progressionibus, unam selegi, quæ omnium videbatur simplicissima, (ut quæ per numeros integros procedit;) eam nempe quæ jam habetur prop. 192. *hujusce tractatus; eamq; ad hanc fere formam (non enim omnibus illam iisdem plane verbis, sed eodem tamen sensu proposui) problematicè concepi;* Si æquabilem quandam curvam contingat in vertice recta unde ad curvam ducantur rectæ axi Parallelæ, æqualibus ab invicem distantiis remotæ, quarum prima sit 1, secunda 6, tertia 30, quarta 140, quinta 630, &c; quanta erit illa quæ interponenda est media inter 1 & 6? *Vel etiam Arithmeticè,* In serie numerorum 1, 6, 30, 140, 630, &c. quæritur terminus medius ipsis 1 & 6 interponendus? *Fieri autem hos terminos indicabam, ex continua multiplicatione numerorum* $1 \times 4\frac{2}{1} \times 4\frac{2}{2} \times 4\frac{2}{3} \times 4\frac{2}{4}$ &c. *vel etiam* $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$ &c. *quorum tam numeratores quam denominatores sunt Arithmetice proportionales. Problema sic conceptum proposui, mensibus sequentibus, (inter alios)*

Clarissimis viris & Mathematicis, D. Setho Wardo *Astronomiæ Professori Saviliano, Collegæ meo meritissimo;* Laurentio Rook, *tunc apud Oxonienses commoranti, nunc apud Londinenses in Collegio Greshamensi Professori Astronomico;* & Richardo Rawlinson *Collegii Reginalis apud Oxonienses Socio; nescio annon etiam sub eodem tempore, (an aliquanto serius)* Roberto Wood *Socio Collegii Lincolniensis,* & Christophoro Wren *Collegii Omnium-Animarum nunc Socio; (sed & aliis etiam aliquot, quibus nominandis supersedeo:) & quidem detecto iis (ni fallor) omnibus eo ad quem tendebat scopo; nempe, datâ illâ quæ quærebatur quantitate absolutam fore quadraturam Circuli. Non autem vel ego mihi vel etiam eorum quispiam (quibus nec erat obvium responsum, nec vacabat suis postpositis de quæsitis meis admodum esse solicitis,) ex voto satisfecit. Monuit autem eorum aliquis ut* Gregorii a Sancto Vincentio *Opus Geometricum consulerem (cujus ne nomen quidem antea audiveram) ut qui magno volumine hujusmodi res quæ ad circuli Quadraturam spectent exposuerit. Huic ego monito obtemperabam; librumq; utut tanto erat volumine ut non integrum perlegere vacaverit, pervolvi utcunq; ; solicitus an inde quæ ad rem nostram facerent reperire possim. Inveni autem aliquando easdem & illi & mihi (quod nihil mirum erat) speculationes obtigisse, licèt diversis methodis eo pervenerimus. Exsempli gratia, Prop.* 15. *nostra apud illum (si memini) alicubi occurrit: at tamen scrupulum illum quem ibidem in Scholio indicavimus, ille vel dissimulat, vel (quod potius putaverim) non animadvertit, nec memini an sensu nostro illam intelligat necne. Item, quod appellat ille* plani in planum ductum, *id ipsú est quod nos et hic, et in Tractatu de Conicis Sectionibus (qui huic gemellus est eodem anno* 1652 *conceptus &*

primitus

primitùs formatus) dicitur, ductus rectarum omnium unius plani in alterius respectivas rectas: *cur autem ego* ductum plani in planum *non dixerim, in causâ erat, quòd revera non tam planum in planum (sic enim prodiret plano-planum, quatuor nempe dimensionum, non solidum,) sed latitudo unius in latitudinem alterius, & factum deniq; in communem altitudinem ducitur; adeoq; tres (non quatuor) emergunt dimensiones. Et alia fortasse nonnulla. Ut autem ex suis ne unam vel propositionem vel demonstrationem in nostrum tractatum assumpsi, quam ego antea non inveneram; ita siquæ forsan occurrant utriq; communes, non opus esse credidi, ut propterea ex nostris delerem, cum & illud sæpissimè contingere sit necesse, ut ubi duo vel plures rem eandem tractandam suscipiant in easdem aliquando incedant speculationes. Verum (utut ille multa habeat acutè inventa, methodo a nostra plane aliena) illud quod apud eum maximè quærebam nusquam inveni; neq; enim ille vel eousq; rem perduxerat, nec etiàm circuli quadraturam, quam se invenisse perhibet, omnino attingit, sed ad propositionem nostræ prop.* 136. *non multum absimilem ubi pervenerat, ratus inde se circuli quadraturam invenisse, non tamen assecutus est; uti in* Ἐξετάσει *sua ostendit* D. Hugenius.

Sub ejusdem anni (1652) *autumno, Clarissimo Viro* Francisco Schotenio *Matheseos Professori apud Lugduni-Batavos, inter alia, proposui etiam hoc problema, (tecto tamen quo collimabat scopo;) qui, re statim cum Clarissimo Viro* Christiano Hugenio *communicata, rescriptis non ita multò post literis intricatam rei difficultatem (utut primo aspectu facilior visa fuerit) subindicavit, nequè interim spem fecit vel sibi vel Dom.* Hugenio *vacaturum fore ut ei ulterius exquirendæ plus operæ impen-*

dant. His eorum omnium responsis, confirmatior factus sum in ea quam pridem conceperam opinione, nempe terminum illum quæsitum neq; numerum rationalem esse, neq; ex adbuc receptis surdis aliquem; sed nova notatione designandum; & quidem, si libet, eâ quam nos ad prop. 190. *assignavimus. Si vero (prout verbi gratia* $\sqrt{2}$, *licet veris numeris exprimi precisè non possit, possit tamen quam proximè, ita) velimus hanc quantitatem veris numeris quam proximè exprimere, (tanta nempe ἀκρίβεια quanta quis velit, modò præcisam non velit,) quomodo illud fiat docemus prop.* 191. *Quomodo illud Geometricè utcunq; exhibeatur, ostensum est item propositionibus sequentibus. Adeoq; circuli quadraturam eousq; prosequuti videmur quantum numerorum natura patitur. Qui vero ulterius rem præstare postulat, perinde est acsi postulet* $\sqrt{2}$ *veris numeris exprimere: quod iniquum esset postulatum. Non interim ignoro quin possit & aliis etiam modis inexplicabilis illa quantitas characteribus designari, atq; ad numeros veris proximos aliis item methodis perveniri, (sicut & de radicibus surdis dici possit,) qua in re non est ut ego viris Mathematicis quicquam præscribam, sed quibus quisq; malit uti liberum relinquam.*

Absoluta autem circuli quadratura, non opus esse duxi cognata illi alia problemata sigillatim attingere; puta quam habeat rationem diameter ad peripheriam; aut sphæra ad cubum; aut conus vel cylindrus ad pyramidem aut prisma; aliaq; similia: nemo enim nescit hæc inde colligere.

Sed neq; de quadratura Ellipseos seorsim quicquam dicendum videbatur; quippe quæ junctim cum quadratura circuli traditur.

Hyperbolæ quadraturam quousq; fuerim assecutus, prop. 165. *ostendimus.*

Interim

Interim tamen, methodi quam trado filum secutus, inopinato incidi in quæstionem satis mirabilem de mensurandis figuris altera parte terminatis altera in infinitum continuatis. Adeoq; quod in una figura solida præstitit Torricellius, id nos in aliis infinitis tam planis quam solidis faciendum ostendimus, prop. 87. & seq. ad 107. Et simul docemus quo dignoscatur criterio num ejusmodi figuræ propositæ in infinitum continuatæ finitam tandem an infinitam magnitudinem sint assecuturæ. Quæ quidem & miranda satis, & jucunda simul, videatur speculatio.

Quod autem jam ante tres annos invenerim, cur non citius in publicum dederim; in causa fuit partim quod ego aliis non raro negotiis fuerim avocatus, sed præsertim quod Typographus, aliis edendis occupatior, non nisi serius susceperit & tardius exsecutus sit & hujus & aliorum qui cum hoc prodeunt tractatuum impressionem. Quam vero, dum quæ jam prodeunt sub Prelo erant, placuit (sub æquinoctio verno) quasi in antecessum emittere, propositionem Cyclometricam, (quæ & eam continet, quam ante aliquot annos sub problematis forma, ut supra dictum est, egregiis aliquot viris proposueram,) invenies ex tribus illis quæ hunc tractatum claudunt desumptam esse. Ex eo autem tempore, (mense jam proximè præterito) prodiit Libellus D. Hobbes; qui jam magna pollicitus in Geometria, & speciatim circuli quadraturam anguliq; in datâ ratione sectionem, aliaq; his cognata, Libellum tandem suum in publicum emisit, quo se ostendit nec horum quicquam præstitisse, nec quidem præstiturum esse; adeo enim turpissimis paralogismis ubiq; scatet Libellus iste, ut raro aliquando quid sanum invenias, (quod nostro istius Elencho, *qui & jam sub Prelo est, manifestum fiet;) unde & Authorem non eum esse*

facile

facile dignoſcas a quo hujuſmodi myſteria ſperemus retexenda.

Cæterum vale, Venerande Senex: Et te Deus ſumme miſericors feliciter ſoſpitet, tuaq; omnia faxit proſpera: ut tandem, poſt Senium Feliciter & Piè tranſactum, ærumnoſam quam vivimus vitam vitâ commutes meliori. Quod animitus precatur

Tui Obſervantiſſimus

Dabam Oxoniæ
Julii 19. 1655.

JO: WALLIS.

Propoſitio quam memorat Epiſtola præcedens hæc eſt quæ ſequitur.

SPECTATISSIMO VIRO

D. GULIELMO OUGHTREDO,

Matheseos cognitione Celeberrimo,

JOHANNES WALLISIUS

Geom. Prof. Oxon. S.

Quam tibi antehac (Celeberrime Vir) Proposuicrem, velatâ facie, & formâ Problematicâ; ut & aliis, quibuscum rem habui, Mathematicis non paucis ante aliquot annos, exhibueram; celatu plerumq; (nonnullis tamen detecto) in quem dirigebatur scopo: En tandem apertâ fronte, formâ Theorematicâ, eloquentem (quam priùs subticebat)

Circuli Quadraturam.

EXpositâ æquabili curvâ VC, cui occurrat in vertice recta VT, in quotlibet particulas æquales divisa, &, à singulis divisionum punctis, totidem rectis parallelis ad curvam usq; ductis, quarum secunda sit 1, quarta 6, sexta 30, octava 140, &c. Erit, ut earum secunda ad tertiam, sic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

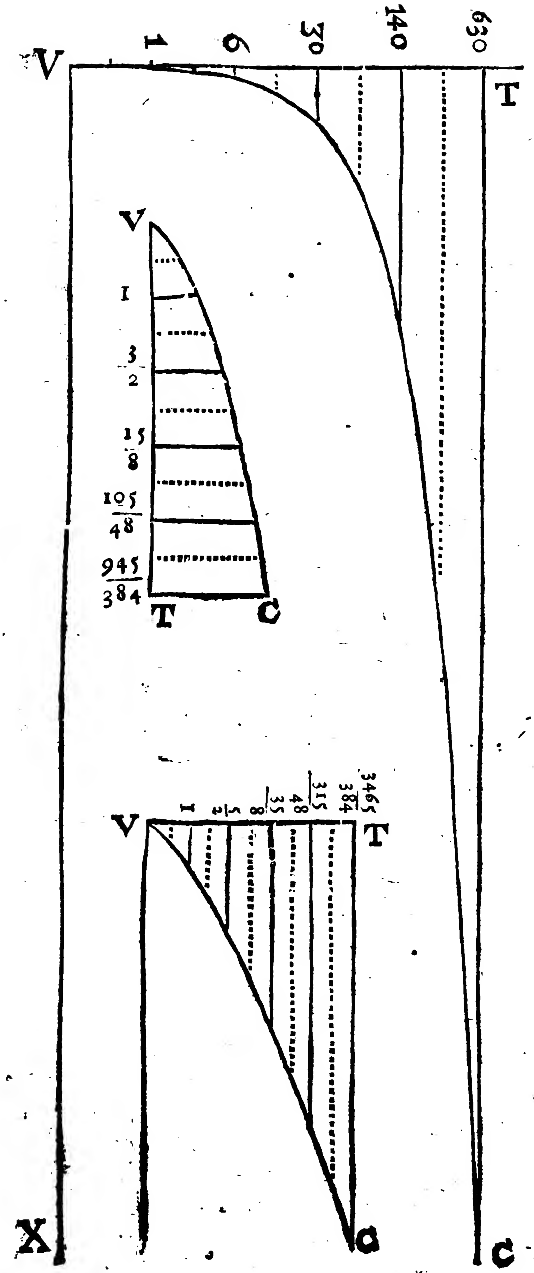
Vel, Si sit secunda 1, quarta $1\frac{1}{2}$ sexta $1\frac{7}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic Circulus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si sit secunda 1, quarta $2\frac{1}{2}$, sexta $4\frac{3}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic triplum Circuli ad quadruplum Quadrati ex Diametro.

Totum Demonstrationis progressum, ipsamq; methodum quâ tam ad hanc circuli, quam ad innumeras alias aliorum curvilineorum quadraturas pervenerim, ostendet tractatus quem apud me jam aliquandiu perfectum habeo, & quidem in Typographorum usum exscriptum, quem in publicum daturus sum, quam primum per Typographorum moras licebit, quorum otia per duos integros & quod excurrit annos jamjam exspectavi.

Dabam è Typographéo *Oxoniensi* postridie Paschatis,

Anno Dom. 1655.


V
T
C
X
1
6
30
140
630
I
3/2
15/8
105/48
945/384
5/2
35/8
315/48
3465/384

Arithmetica Infinitorum.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; *difficiliora Mathescos Problemata.*

PROP. I. *Lemma.*

SI proponatur series Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (sive juxta naturalẽ numerorum consecutionem) continuè crescentium, a puncto vel o (ciphra, seu nihilo) inchoatarum, (puta ut o, 1, 2, 3, 4. &c.) propositum sit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simplicissimus investigandi modus, in hoc & sequentibus aliquot Problematis, est, rem ipsam aliquousq; præstare, & rationes prodeuntes observare atq; invicem comparare; ut inductione tandem universalis propositio innotescat.

Est igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42} = \frac{1}{2}$.

Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit semper ratio subdupla. Adeóq; ----

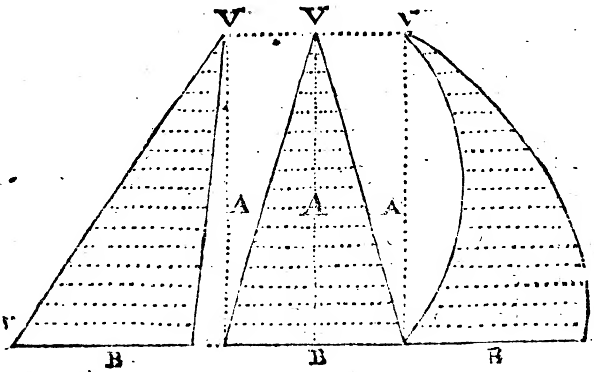
PROP. II. *Theorema.*

SI ſumatur ſeries quantitatum Arithmeticè proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim diſcriminis cauſa erit,) erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 2.

Nempe, ſi primus terminus ſit o, ſecundus 1, (nam ſi ſecus, moderatio adhibenda erit,) & ultimus l erit ſumma $\frac{l+1}{2}l$. (erit enim, eo caſu, numerus terminorum $l+1$.) vel, (poſito numero terminorum a, quantuſcunq; ſit terminus ſecundus) $\frac{1}{2}al$.

PROP. III. *Corollarium.*

ERgo, *Triangulum ad Parallelogrammum (ſuper æquali baſe, æquè altum,) eſt ut* 1 *ad* 2.

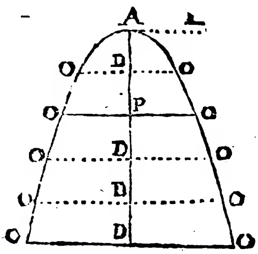


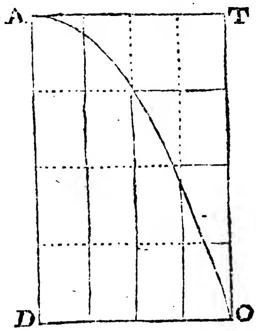
Triangulum

Triangulum enim conſtat quaſi ex infinitis rectis parallelis Arithmeticè-proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima eſt baſis, (ut oſtendimus ad pr. 1, & 2. libri noſtri de Conicis Sectionibus;) Parallelogrammum autem ex totidem baſi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc eſt ut 1 ad 2 (per præced.) Quod erat demonſtrandum.

PROP. IV. *Corollarium.*

ITem, *Pyramidoides vel Conoides Parabolicum (ſive erectum ſit ſive inclinatum,) ad Priſma vel Cylindrum (ſuper æquali baſe, æque-altum,) eſt ad* 1 *ad* 2.





Conſtat enim Pyramidoides vel Conoides Parabolicum quaſi ex infinitis planis Arithmetice-proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima eſt baſis, (ut oſtendimus prop. 9. Con. Sect.) Priſma verò vel Cylindrus ex totidem baſi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc ut 1 ad 2, per prop. 2.

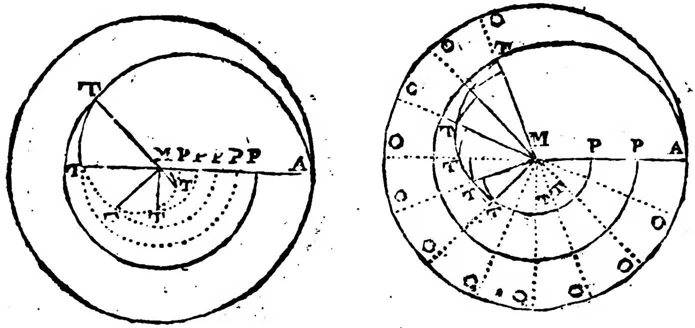
PROP. V. *Corollarium.*

ITem, *Linea Spiralis qualibet MT (a Spiralis Principio exorſa) ad correſpondentem Peripheriæ ar-*

 conter-

conterminum PT (a Principio circulationis exorsum,) est ut 1 ad 2.

Esto enim Linea Spiralis (una circulatione facta) MTA, Principium Spiralis M, (quod idem esto & centrum Arcûs Peripheriæ, quem correspondentem voco,) Principium circulationis recta MA, quæ æquabili motu circumducta (manente puncto M) supponitur puncto suo A peripheriam describere AOA (qui *Circulus primus* vel potius *Circuli primi Peripheria*, di-



Spiralis in utraq; figura continuanda erat integra ad medium usq; sed, per Cœlatoris incuriam, in altera manca est, in altera intercisa.

ci vel solet vel commode potest,) dum interim punctum aliquod (in eadem recta circumducta) moveri supponitur (æquabili item motu) ab M ad A, motu suo lineam Spiralem MTA describens: Adeóq; recta quælibet MT (a principio spiralis M, ad spiralem ubivis ducta) erit ad rectam MA, ut peripheriæ arcus AO (eodem tempore descriptus) ad peripheriam totam AOA, vel ut angulus AMT ad quatuor rectos: Adeoq & rectæ MT, MT, arcubus AO, AO, proportionales erunt, ut patet.

Tum, ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos AMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus (adeoq; arithmeticè proportionalibus) supponamus (super illis angulis) similes Sectores totidem (saltem uno minus, quia in spacio primo sector inscribi non poterit) figuræ MTM (spirali MT & rectâ TM comprehensæ) inscribi. Sectores illi omnes con-

stituent

ſtituent figuram (ex ſimilibus ſectoribus compoſitam) ipſa figura MTM (cui inſcribitur) minorem: Differentia verò perpetuo minuetur prout ſectores illi (eidem MTM figuræ inſcripti) plures fuerint, (ut patet,) adeò ut, ſi ſectores illi ſupponantur infiniti, figura ſic inſcripta ipſi MTM figuræ congruet, (per ea quæ univerſaliter monuimus ad prop. 2. Con. Sect.) & propterea ſectorum illorum omnium arcus ipſi ſpirali MT congruent.

Sunt autem illi ſimilium ſectorum arcus (ſicut eorum radii) arithmeticè proportionales, nempe ut 0, 1, 2, &c. angulus autem cujuſlibet ſectoris eſt ea pars anguli totius AMT quæ ſectorum ſive ſpaciorum numero cognominis eſt; adeoq; ſi ſectores ſupponantur infiniti, erit angulus cujuſlibet $\frac{1}{\infty}$ (pars infinitè-parva) anguli totius AMT, ita nempe ut omnes ſimul æquentur toti AMT. (Liceat autem mihi, καταχρηστικῶς forſan, Anguli nomine appellare angulorum etiam aggregatum, quamvis fortaſſe duos rectos vel æquet vel etiam ſuperet.)

Spiralis igitur MT conſtare ſupponitur ex infinitis ſectorum arcubus arithmeticè proportionalibus, (ſubtenſis $\frac{1}{\infty}$ anguli AMT,) quorum minimi radius eſt 0, ſeu punctum, (nullius magnitudinis,) maximi vero recta MT.

Correſpondens autem arcus conterminus PT, ex totidem conſtat ſectorum arcubus maximo æqualibus, ut patet.

Ergo aggregatum illorum (hoc eſt linea ſpiralis MT) ad aggregatum horum (hoc eſt arcum conterminum PT) eſt ut 1 ad 2. per prop. 2.

PROP. VI. *Corollarium.*

ET propterea, *Linea Spiralis MA una circulatione facta æquatur ſemiſſi peripheriæ circuli primi, AA.*

Nam arcus conterminus ſpirali MA, eſt integra peripheria circuli primi puncto A deſcripta. Ideoq; &c. pro prop. 5. quod erat demonſtrandum.

PROP. VII. *Coroll.*

ET *Spiralis descripta circulationibus duabus, tribus, quatuor, &c. integris; æquatur semissi peripheriæ circuli secundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c. sumptæ.*

In figura sequente.

Nam dum describitur Spiralis MAB (duabus circulationibus facta) Punctum illud B, peripheriam BB bis describit: & dum describitur spiralis MABC, peripheria CC ter describitur; & peripheria DD quater, dum describitur spiralis MABCD. Et sic deinceps, pro numero circulationum multiplicanda est peripheria contermini circuli, & multipli semissis æquatur spirali interea descriptæ.

PROP. VIII. *Coroll.*

SI vero *Spiralis ultra circulationem primam, sed non duabus integris continuetur, æquabitur semissi tam peripheriæ integri circuli contermini, quam ejusdem continuationis supra circulum integrum.*

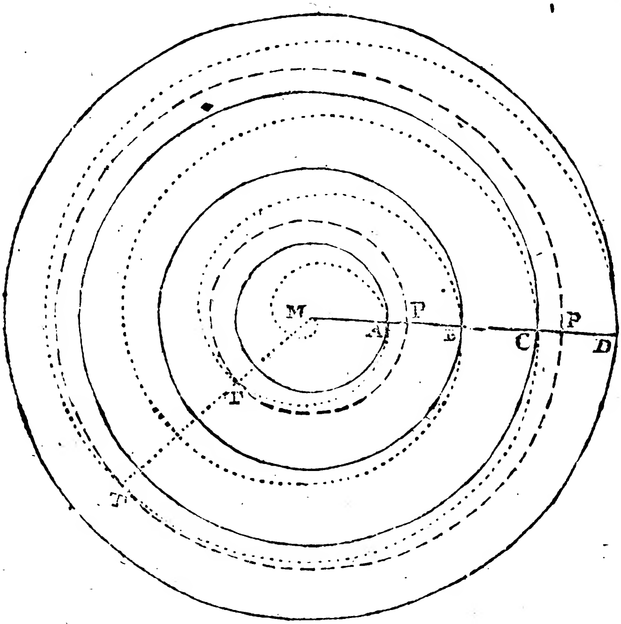
Nam interea dum describitur (motu composito) Spiralis MAT, describetur etiam (a puncto P) arcus PPT, nempe tota peripheria PP cum adjuncto additamento PT. Ergo &c. per prop. 5 Quod erat demonstrandum.

PROP. IX. *Coroll.*

ET pariter, *Si spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; æquabitur illa semissi conterminæ peripheriæ integræ, bis, ter, quater, aut sæpius acceptæ (pro numero nempe integrarum circulationum) cum semisse item additamenti.*

Quia

Quia nempe dum spiralis illa describitur, toties describitur peripheria contermina integra, atq; insuper additamentum: Hoc est, correspondens arcus conterminus continet totidem in-



tegros circuli ambitus (quot sunt integræ circulationes) cum additamento. Ideoq; constat propositum, per prop. 5.

PROP. X. *Corollarium.*

ATq; insuper, *Lineæ Spirales unâ, duabus, tribus, quatuor, &c. circulationibus factæ, (puta MA, MAB, MABC, MABCD, curvæ) se habent ad invicem ut numerorum Arithmetice-proportionalium quadrata; nempe ut* 1, 4, 9, 16, *&c. Sive sunt in duplicata ratione rectarum* MA, *MB, MC, MD, &c.*

Sunt

Sunt enim rectæ MA, AB, BC, CD, invicem æquales (propter æquabilem progressum puncti mobilis in rectâ MA, etiam continuatâ, tantum in una circulatione æquabiliter progredientis quantum in altera;) adeóq; tam radii MA, MB, MC, MD, quam Peripheriæ (illis radiis descriptæ) A, B, C, D, sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4. Si igitur sumantur peripheriæ, prima semel, secunda bis, tertia ter, quarta quater, erunt illa multipla, (puta 1 A, 2 B, 3 C, 4 D,) ut numeri quadrati 1, 4, 9, 16, sive 1×1, 2×2, 3×3, 4×4. Et propterea etiam horum multiplorum semisses, hoc est (per prop. 5.) spirales MA, MAB, MABC, MABCD.

Vel aliter, si circuli primi peripheria ponatur $A=p$, erit secundi $B=2p$, tertii $C=3p$, quarti $D=4p$, & sic deinceps; & $1A=1p$, $2B=2\times2p=4p$, $3C=3\times3p=9p$, $4D=4\times4p=16p$; &c. Et (per prop. 5) Curvæ spirales $MA=\frac{1}{2}p$, $MAB=\frac{2}{2}B=\frac{4}{2}p$, $MABC=\frac{3}{2}C=\frac{9}{2}p$, $MABCD=\frac{4}{2}D=\frac{16}{2}p$, &c. ideoq; ad invicem ut 1, 4, 9, 16, &c. hoc est in duplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c. (quæ sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4, &c.) Quod erat demonstrandum.

PROP. XI. *Coroll:*

Et universaliter; *Ejusdem (vel similium) spiralis segmenta quælibet (a principio spiralis exorsa) sunt ad invicem in duplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per constructionem lineæ spiralis) eadem sit ratio rectarum MT, MT, quæ est angulorum PMT, PMT, (anguli voce eo sensu sumpta qui supra innuitur prop. 5.) ratio arcuum PT, PT, (quæ ex duabus illis rationibus componitur,) ut & curvarum MT, MT, (quæ istorum arcuum sunt semisses) erit duplicata rationis rectarum MT, MT, seu ut MTq, MTq.

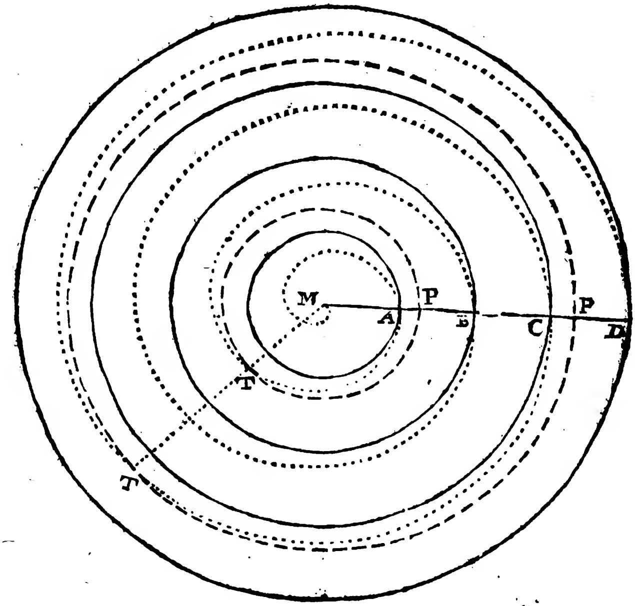
Sic v.g. si recta MA (unius circulationis) dicatur $1r$, & peripheria circuli primi (eo radio descripta) $1p$, erit spiralis $MA=\frac{1}{2}p$. Igitur, in una circulatione cum semisse, fiet recta contermina $1\frac{1}{2}r=\frac{3}{2}r$, & peripheria contermini circuli $\frac{3}{2}p$, quæ ducta

ducta in $\frac{3}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times p = \frac{9}{4} p$: Ejusq; ſemiſſis $\frac{9}{2 \times 4} p = \frac{9}{8} p$ eſt linea ſpiralis eodem tempore deſcripta.

Similes *autem appello lineas Spirales, ſi rectæ MA, MB, MC, &c in unâ, æquales ſint homologis rectis in altera.*

PROP. XII. *Corollarium.*

SI vero *ejuſmodi ſpiralium diſſimilium (puta ſi MB in unâ, tanta ſit quanta MC in alia) rectæ conterminæ ſint æquales; erunt ſpiralium illarum ſegmenta homologis ſuis rectis (puta MA in una, & MA in altera) reciprocè proportionales.*



Nam v.g. in primâ, erit ſpiralis MAB (duabus circulatio-

 nibus

nibus descripta) æqualis semissi peripheriæ suæ B, bis sumptæ; & in secunda, Spiralis MABC (tribus circulationibus descripta) æqualis semissi suæ peripheriæ C ter sumptæ: Cúmq; supponantur æquales peripheriæ B in primâ, & C in secunda, (propter æquales radios;) erunt spirales MAB prima, & MABC secunda, ad invicem 2 ad 3, (nempe ut peripheria bis sumpta, ad eandem vel æqualem ter sumptam;) hoc est, in reciprocâ ratione rectarum homologarum MA, MA: Nam recta MA in primâ est $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & recta MA in secundâ est $\frac{1}{3}$ (ejusdem vel æqualis rectæ) MC: sunt igitur MA in secunda ad MA in primâ, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut $\frac{2}{6}$ ad $\frac{3}{6}$, vel ut 2 ad 3. Ideoq; Spiralis prioris segmentum MAB, ad spiralis posterioris segmentum MABC, ut recta MA in secunda ad rectam MA in primâ.

Atq; idem similiter ostendetur, quæcunq; sit ratio homologarum rectarum in dissimilibus spiralibus.

PROP. XIII. *Corollarium.*

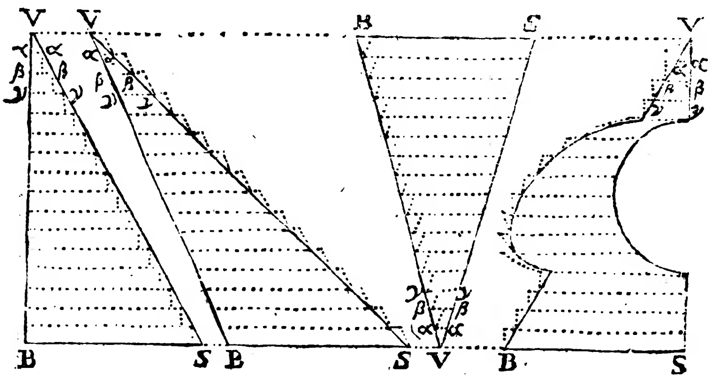
SI autem *ejusmodi spiralium dissimilium rectæ conterminæ sint etiam inæquales; erunt illæ spiralium segmenta adinvicem in eâ ratione quæ componitur ex duplicata ratione rectarum conterminarum, & reciprocâ ratione rectarum homologarum.*

Sequitur ex prop. 11. 12.

SCHOLIUM.

Notandum autem est, in propositionibus præcedentibus, quæ de linea Spirali agunt (quod & in secuturis aliquot facturus sum) me *lineæ Spiralis* appellationem (ne longa circumlocutione toties opus sit) abusive usum fuisse. Nempe, per *lineam Spiralem*, (quoties ea ad Peripheriam comparatur,) intellectum vellem *Aggregatum omnium arcuum Sectorum similium, numero infinitorum, ex quibus constat figura illa ex infinitis numero Sectoribus Spirali inscripta*; (qua scilicet & nos ad Prop. 5. &c. hujus, & Archimedes ad Prop. 21 &c. lin. spir. usi sumus:) ut ad prop. 5. innuimus. Quod quidem Aggregatum ipsa linea Spirali proprio sensu sumpta, perpetuò minus est, & maxime quidem circa spiralis

ralis initium. Quamvis enim Sectorum illorum numero infinitorum aggregatum, ipsi figuræ lineis recta & Spirali terminatæ, (juxta methodum Indivisibilium) æquale ponatur; non tamen illud de omnium Arcubus cum ipsa Spirali (propriè dicta) comparatis obtinebit. Tantundem enim esset, acsi quis, dum infinita numero parallelogramma triangulo inscripta (aut etiam circumscripta) toti triangulo VBS æqualia videat, inde



concluderet eorum omnium latera rectæ VS adjacentia (rectæ VB parallela) ipsi VS simul æqualia esse, vel quæ rectæ VB adjacent (ipsi VS parallela) æqualia simul esse toti VB. (Quod siquando verum esse contingat, puta in triangulo isosceli, non tamen id universaliter concludendum erit.) Atq; hoc quidem eo potius admonendum duxi, quod viderim etiam viros doctos nonnunquam speciosa ejusmodi verisimilitudine in lapsum proclives esse. Cur autem omissa Spirali genuina, spuriam hanc peripheriæ comparaverim; causa est, quod huic possim, non autem illi, æqualem peripheriam assignare.

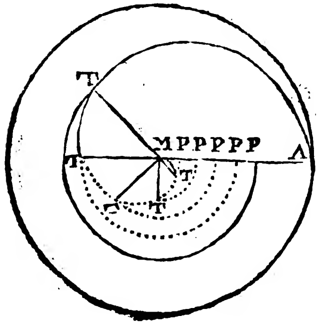
PROP. XIV. *Corollarium.*

ET propterea etiam *segmenta spiralis, a principio spiralis exorsa, sunt ad rectas conterminas, sicut Parabolæ Diametri interceptæ, ad ordinatim-applicatas.*

Nempe in ratione duplicatâ, per prop. 11.

PROP. XV. *Coroll.*

Ideo *si supponatur* Spiralis *nostra MTT ita evolvi, ut rectam constituat, & rectæ omnes TM, TM, fiant invicem parallelæ; erit illa, Diameter, hæ verò, ordinatim-applicatæ in Parabola: Contra vero, si supponatur Parabolæ diameter ita in arcus convoluta, ut ordinatim-applicatæ ad idem punctum terminentur; fiet illa, Spiralis; istæ, rectæ contermina; hoc deniq;, principium* Spiralis.



SCHOLIUM.

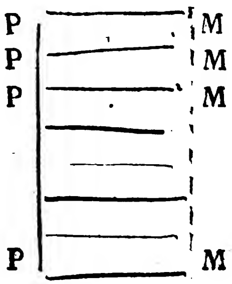
Atq; hinc etiam ulterius patet illud quod post prop. 13. indicavimus. Nempe, Spiralem illam nostram ex infinitis similium Sectorum arcubus conflatam, non esse genuinam Spiralem propriè dictam, sed ipsa minorem. Cum enim constet, in parabola, ordinatim-applicatas, quæ vertici propiores sunt quam ea quæ lateri-recto æquatur, longiores esse quam sunt diametri-interceptæ; adeoq; non ita convolvi posse parabolæ diametrum (dummodo infracta maneat) ut earum ordinatim-applicatarum extremitates in ipso vertice coeant, (quippe quod, quæ jam curvata supponitur, minor esse non possit, quam recta contermina, quæ prius erat ordinatim-applicata:) Necesse est ut vera Spiralis, quæ sic convoluta est, major sit quam ea quæ supponitur ex arcuum aggregato conflari, quam Parabolæ diametro convenire jam ostensum est, quippe quæ est ubiq; in duplicata ratione rectarum conterminarum.

PROP.

PROP. XVI. *Coroll.*

Parabola vero sic convoluta (hoc est, figura Spirali nostræ adjacens) est ejusdem Parabolæ evolutæ semissis.

E.enim v. g. Si supponamus parallelogrammi PM latus PP ita convolvi, ut rectarum omnium PM puncta M in eodem puncto coeant, fiat ex Parallelogrammo (propter radios omnes a communi centro M æquales) circuli sector (qui circulo integro vel minor erit vel major vel æqualis, pro ea ratione quam ad invicem habeant rectæ PP, PM;) qui quidem Sector (hoc est Parallelogrammum convolutum) erit parallelogrammi (evoluti) Semissis; (propterea quod pro infinitis Parallelogrammis ex quibus Parallelogrammum expositum constare supponitur, fiunt totidem in Sectore triangula easdem & bases & altitudines habentia:) Pari modo, si ita convolvetur Parabola ut dictum est, & ordinatim-applicatarum (pridem parallelarum) extrema altera in eodem puncto coeant; infinita illa parallelogramma ex quibus constare supponimus planum parabolæ (per ea quæ diximus ad prop. 2. & 8. Con. Sect.) fient totidem triangula easdem & bases & altitudines (cum illis parallelogrammis) habentia: & propterea Parabola sic convoluta (hoc est, figura Spiralis,) ipsius evolutæ semissis erit.

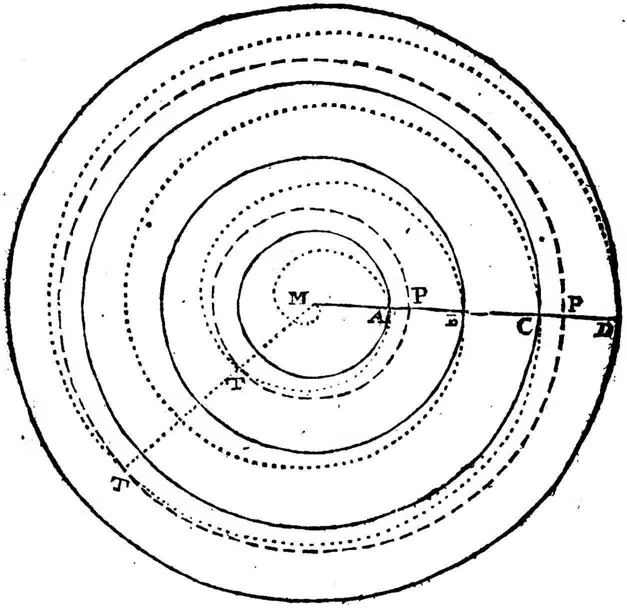


Atq; hoc quidem convenit cum iis quæ habet Torricellius Exempl. 8. eorum quæ ipsius tractatui de solido Hyperbolico præmisit; utut a principiis plane diversis petita.

PROP. XVII. *Corollarium.*

INsuper, *Segmenta spiralis, quæ fiunt circulationibus prima, secunda, tertia, quarta, & sic deinceps; sunt*

inter se ut 1, 3, 5, 7, & sic deinceps in progressione arithmetica.

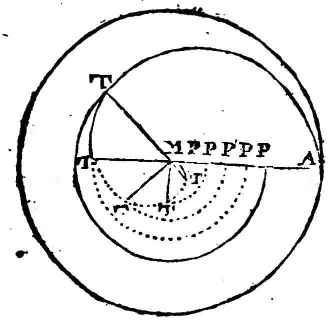


Sunt enim (per 10) spirales MA, MAB, MABC, MABCD, &c. ut 1, 4, 9, 16, &c. ergo segmenta spiralium MA, AB (= MAB − MA,) BC (= MABC − MAB,) CD (= MABCD − MABC,) &c. ut 1, (4 − 1 =) 3, (9 − 4 =) 5, (16 − 9 =) 7. &c.

PROP. XVIII. *Coroll.*

ET universaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuo PMT, TMT, &c.) æquales invicem facientibus, erunt spiralis segmenta continuè intercepta,* (MT, *TT, &c.*) *ut* 1, 3, 5, 7, *&c.*

Cum enim (propter æquales angulos) ipsæ rectæ MT, MT,



MT, &c. sint ut 1, 2, 3, 4, &c. (per constructionem spiralis:) & propterea curvæ MT, MT, &c. (istis rectis conterminæ) sint in rectarum ratione duplicata (per prop. 11.) nempe ut 1, 4, 9, 16, &c. erunt ipsa segmenta continua, MT, TT, &c. ut 1, 4 − 1, 9 − 4, 16 − 9; Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Tota hæc de longitudine lineæ spiralis doctrina, continuis quatuordecim propositionibus jam tradita, est apud Archimedem in libro de lineis Spiralibus penitus omissa: Nescio an ab alio quopiam ex recentioribus tradita fuerit.

PROP. XIX. *Lemma.*

SI proponatur series Quantitatum in *duplicata* ratione Arithmeticè-proportionalium, (sive juxta seriem numerorum quadraticorum,) continuè crescentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 4, 9, 16, &c.) propositum sit inquirere, quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium?

Fiat investigatio per modum inductionis, (ut in prop. 1.) eritq;
$\dfrac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$ $\dfrac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3}+\frac{1}{12}.$
$\dfrac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3}+\frac{1}{18}.$ $\dfrac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80} = \frac{3}{8} =$
$\frac{9}{24} = \frac{1}{3}+\frac{1}{24}.$ $\dfrac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150} = \frac{11}{30} = \frac{1}{3}+\frac{1}{30}.$

$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252} = \frac{13}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}$. Et sic deinceps.

Ratio proveniens est ubiq; major quam subtripla, seu $\frac{1}{3}$. Excessus autem perpetuò decrescit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$ &c. aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis numero senario, (ut patet,) ut sit rationis provenientis excessus supra subtriplum, ea quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post o, adeoq; ----

PROP. XX. *Theorema.*

SI proponatur series quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium, a puncto vel o inchoatarum; ratio quam habet illa ad seriem totidem maxime æqualium, subtriplam superabit; eritq; excessus, ea ratio quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post o; sive, quam habet radix quadratica termini primi post o, ad sextuplum radicis quadraticæ termini maximi.

Puta (si terminus post o primus ponatur 1, & ultimi latus l) $\frac{l+1}{3}l^2 + \frac{l+1}{6l}l^2$. Vel (posito numero terminorum a, & ultimi latere l,) $\frac{a}{3}l^2 + \frac{a}{6a-6}l^2$.

Patet ex Prop. præced.

Cùm autem crescente numero terminorum, excessus ille supra rationē subtriplum ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est. Adeoq; ----

PROP.

PROP. XXI. *Theorema.*

SI proponatur series infinita Quantitatum in duplicata ratione arithmetice-proportionaliũ, (sive juxta seriem numerorum quadraticorum,) continue crescentium, a puncto seu o inchoatarum; erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 3.

Patet ex præced.

PROP. XXII. *Corollarium.*

IDeoq; *Conus vel Pyramis ad Cylindrum vel Prisma (super eadem vel æquali base æquè altum) est ut* 1 *ad* 3.

Constare enim supponimus tam Conum quam Pyramidem ex infinitis planis similibus & parallelis, in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium constitutis, quorum minimum supponitur Punctum, maximum verò basis; (per ea quæ diximus ad Prop 6. Con. Sect.) Cylindrus autem vel Prisma, ex totidem maximo æqualibus (ut patet:) Ratio igitur est ut 1 ad 3. per præced.

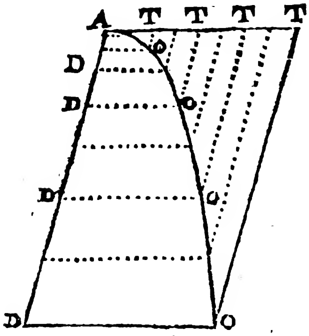
PROP. XXIII. *Coroll:*

ITem *Complementum Semi-parabolæ, (intellige figuram AOT quæ cum ipsa semi-parabola complet Parallelogrammum,) est ad Parallelogrammum TD (super eadem vel æquali base æquè-altum) ut* 1 *ad* 3. *(Et consequenter, ipsa semi-parabola est ad idem Parallelogrammum, ut* 2 *ad* 3.*)*

Esto enim Figuræ AOT vertex A, diameter AT, basis TO, eiq; parallelæ quotlibet (Basem inter & verticem) TO, TO, &c. Quoniam sunt (per prop. 21 Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. in subduplicata ratione rectarum AD, AD, &c. Erunt

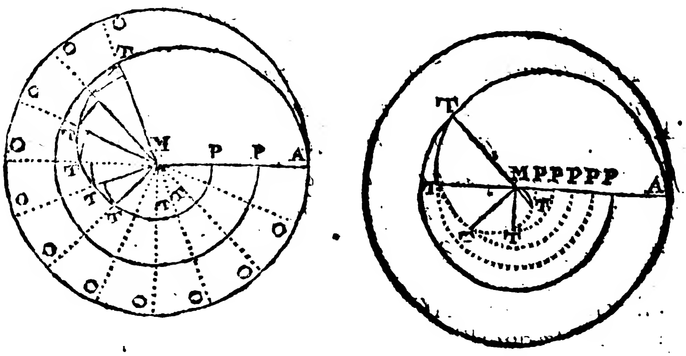
E e è contra

è contra ipsæ AD, AD, &c. hoc est TO, TO, &c. in ratione duplicata ipsarum DO, DO, &c. hoc est AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (constans ex infinitis rectis TO, TO, &c. in duplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmeticè proportionalium) erit ad Parallelogrammum æquè altum TD (constans ex totidem rectis ipsi TO maximæ æqualibus) ut 1 ad 3. per prop. 21. (Quod erat ostendendum.) Et consequenter, semiparabola AOD (parallelogrammi residuum) ad idem Parallelogrammum ut 2 ad 3.



PROP. XXIV. *Corollarium.*

Item, *Figura MTM, quæ spirali MT (a principio spiralis M exorsa) & recta MT contermina continetur; est ad Sectorem correspondentem PMT; ut* 1 *ad* 3.



Nam (ut diximus ad Prop. 5.) constare supponimus Figuram

ram illam MTM ex infinitis Sectoribus similibus, quorum radii sunt Arithmeticè-proportionales, adeoq; Sectores ipsi in duplicata ratione Arithmeticè-proportionalium (quippe suorum laterum;) Sectorem autem PMT ex totidem Sectoribus maximo æqualibus: Eritq; propterea Figura illa ad hanc, ut 1 ad 3. per prop. 21.

Sectoris autem nomine hic appello etiam Sectorum quotlibet aggregatum, licet semi-circulum (aut quidem circulum integrum) æquet vel etiam superet; (sicut & de Anguli appellatione supra monuimus, ad Prop. 5.)

PROP. XXV. *Corollarium.*

ET propterea, *Figura MTA quæ spiralis circulatione prima describitur, æquatur trienti circuli primi, AA.*

Nam correspondens Sector conterminus est ipse circulus integer AA, circuli primi radio MA eodem tempore descriptus.

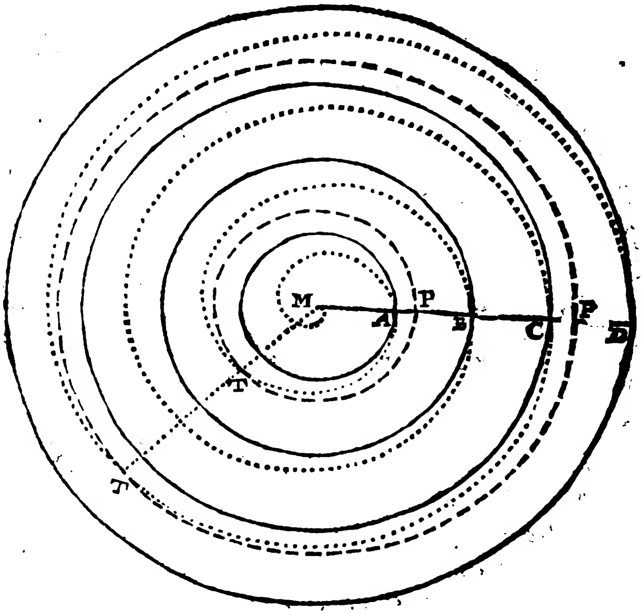
PROP. XXVI. *Corollarium.*

Q*Uæ* vero *figura describitur integris circulationibus prima & secunda; prima, secunda & tertia, prima, secunda, tertia, & quarta; & sic deinceps: (quâ libet parte toties repetita, quoties circulando describitur:) æquatur trienti circuli secundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c: (juxta numerum circulationum) sumpti.*

Nam dum describitur spiralis MAB (duabus circulationibus facta) a puncto mobili ab M ad B (in recta circumducta MB) pro moto & simul figura plana a recta (sic continuè crescente) circumducta: Eodem tempore describitur (a rectâ totâ MB circumducta) circulus secundus bis. Adeoq; quot partibus continuè crescentibus (in ratione duplicata Arithmeticè proportionalium) constat figura illa Spirali terminata, totidem maximæ æqualibus constabit circulus ille bis descriptus. Quare figura sic descripta spirali adjacens, erit ad circulum

conterminum BB bis ſumptum ut 1 ad 3. per prop. 24.

Et pariter figura ſpiralis, quæ circulationibus primâ, ſecunda & tertia deſcribitur, erit ad circulum tertium ter ſumptum, ut 1 ad 3. Et quæ deſcribitur circulationibus primâ, ſecunda, tertia & quarta, ad circulum quartum quater ſumptum, item ut 1 ad 3. Et ſic deinceps.



Notandum hic, quod tota figura ſpiralis, primâ circulatione deſcripta, in ſecunda circulatione repetitur; & quæ deſcribitur ſecundâ, repetitur in tertia; & ſic deinceps. Adeoq; v. g. in quatuor circulationibus, figura prima (quæ intra ſpiralem primam, primâ circulatione deſcriptam, continetur) quater, ſecunda (quæ inter ſpiralem primam & ſecundam jacet) ter, tertia (quæ inter ſpiralem ſecundam & tertiam jacet) bis, quarta ſemel deſcribitur: ideóq; figura prima quater, ſecunda ter, tertia bis, & quarta ſemel ſumpta, ſimul æquantur trienti circuli quarti quater ſumpti, nempe juxta numerum circula- tionum

tionum. Et pariter de quotvis circulationibus judicandum est, habita semper numeri circulationum consideratione.

PROP. XXVII. *Corollarium.*

SI autem *Spiralis ultra circulationem primam sed non duabus integris continuetur, figura spiralis sic descripta (bis sumpto quod bis describitur) æquabitur trienti tam integri circuli contermini, quam ejusdem continuationis supra circulum integrum.*

Nam interea dum describitur figura spiralis MATM, describitur etiam figura circularis aucta PPTM; nempe circulus integer PP, cum adjuncto etiam sectore PMT.

PROP. XXVIII. *Corollarium.*

ET pariter, *si Spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; figura spiralis sic descripta (repetitâ toties qualibet parte quoties describitur,) æquabitur trienti tam integri circuli contermini bis, ter, quater, aut sæpius sumpti (pro numero nempe integrarum circulationum,) quàm etiam additamenti sive sectoris adjuncti.*

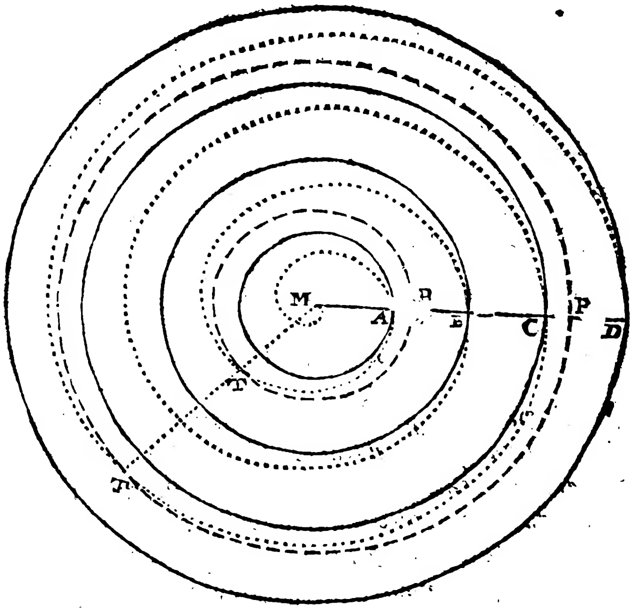
Quia nempe dum figura illa spiralis (a circumducta recta crescente) describitur, toties describitur, (a recta circumducta æquabili) circulus conterminus, atq; insuper additamentum.

PROP. XXIX. *Coroll.*

ATq; insuper, *Figuræ spirales quæ prima, quæ prima & secunda, quæ prima, secunda & tertia, quæ prima, secunda, tertia & quarta, (& sic deinceps) circulationibus describuntur, (puta MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c.) se habent ad invicem ut numerorum Arithmeticè proportionalium cubi,* 1,

 8,

8, 27, 64, &c: sive in triplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c.



Sunt enim rectæ MA, MB, MC, MD, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. (ut sæpius dictum est,) ideoq; circuli primus, secundus, tertius, quartus, &c. (his radiis descripti) ut 1, 4, 9, 16, &c. (nempe in duplicata ratione radiorum; adeóq; si ponatur circulus primus $A = 1c$, erit secundus $B = 4c$, tertius $C = 9c$, quartus $D = 16c$, &c; & propterea si sumatur primus semel, secundus bis, tertius ter, quartus quater, &c. erunt $1A = 1c$, $2B = 2 \times 4c = 8c$, $3C = 3 \times 9c = 27c$, $4D = 4 \times 16c = 64c$, &c. adeoq; ad invicem ut numeri cubici 1, 8, 27, 64, &c. quapropter & horum trientes $\frac{1}{3}c$, $\frac{8}{3}c$, $\frac{27}{3}c$, $\frac{64}{3}c$, &c. hoc est, (per prop. 25, 26.) figuræ spirales MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c, sunt etiam inter se ut numeri cubici 1, 8, 24, 64, &c.

PROP.

PROP. XXX. *Corollarium.*

ET Universaliter, *Figuræ spirales (a spiralis principio exorsæ, & eâdem vel simili lineâ spirali terminatæ) sunt ad invicem in triplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per constructionem lineæ spiralis) eadem sit ratio rectarum MT, MT, quæ est angulorum PMT, PMT, (sumpta *Anguli* voce, eo sensu quo supra prop. 5. ut & *sectoris* voce, eo sensu quo supra prop. 24.) sectorum PMT, PMT, ad invicem ratio (quæ componitur ex ratione angulorum & duplicata ratione radiorum) est rectarum MT, MT, ad invicem, ratio triplicata: Et propterea eadem erit etiam ad invicem ratio figurarum spiralium MTM, MTM, quæ illorum Sectorum sunt trientes. per pr 24. *In Figura Prop. 29.*

Sic v.g. si recta MA (unius circulationis) dicatur $1\,r$, & circulus eo radio descriptus dicatur $1\,c$; figura spiralis eodem tempore descripta erit $\frac{1}{3}c$ Igitur in una circulatione cum semisse fiet recta contermina $1\frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$; circulus conterminus $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{9}{4}c$, qui ductus in $\frac{3}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{27}{8}c$, ejusq; triens $\frac{9}{8}c$, est figura spiralis quæ & circulatione integra & insuper semisse describitur. Et similiter in quantacunq; circulatione.

PROP. XXXI. *Corollarium.*

SI vero *ejusmodi figuræ spirales, lineis spiralibus dissimilibus, & rectis æqualibus terminentur:* (*Puta si AB in una spirali, tanta sit, quanta MC in alia:*) *erunt figuræ illæ spirales homologis suis rectis (puta MA in unâ, & MA in altera) reciproce-proportionales.*

Nam in prima erit figura MABM (duabus circulationibus descripta) æqualis trienti circuli sui B bis sumpti; Et in secunda, figura MABCM (tribus circulationibus descripta) æqualis

qualis trienti circuli sui C ter sumpti. (per prop. 29, 30.) cumq; supponantur æquales circuli B in primâ & C in secunda (propter æquales radios,) erunt figuræ spirales MABM prima, & MABCM secunda, ad invicem, ut 2 ad 3, nempe ut circulus bis sumptus ad eundem vel æqualem ter sumptum;) hoc est, in reciproca ratione rectarum homologarum MA, MA. Nam MA in prima est $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & MA in secunda $\frac{1}{3}$ (æqualis rectæ) MC; sunt igitur MA in secunda, ad MA in primâ, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel $\frac{2}{6}$ ad $\frac{3}{6}$, vel 2 ad 3 Ideoq; Figura MABM in spirali primâ, ad figuram MABCM in spirali secunda, ut recta MA in secunda ad rectam MA in primâ.

Atq; idem similiter ostendetur, quæcunq; sit ratio homologarum rectarum in dissimilibus spiralibus.

PROP. XXXII. *Corollarium.*

SI autem *ejusmodi figuræ spirales, lineis spiralibus dissimilibus, & rectis item inæqualibus terminentur; erunt illæ ad invicem in ratione quæ componitur ex triplicata ratione rectarum terminantium, & reciproca ratione rectarum homologarum.*

Sequitur ex Prop. 30, 31.

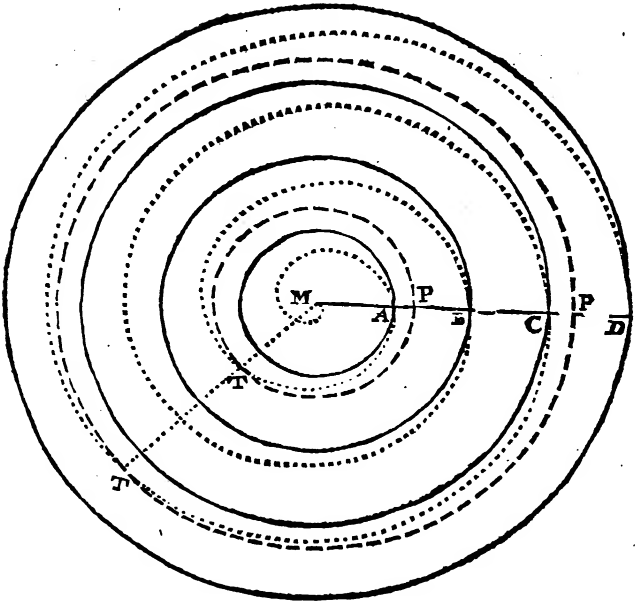
PROP. XXXIII. *Corollarium.*

POrro, *Figuræ spirales, quæ circulationibus prima, secunda, tertia, quarta, &c. describuntur, sunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61, *&c. nempe ut differentiæ numerorum cubicorum, quorum latera sunt Arithmeticè-proportionalia.*

Nam (per pr. 29.) quæ prima, quæ prima & secunda, quæ prima secunda & tertia, quæ prima secunda tertia & quarta, &c, describuntur; sunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c. ergo, quæ prima, quæ secunda, quæ tertia, quæ quarta, &c. describuntur sunt ut 1, 8 − 1, 27 − 8, 64 − 27, 125 − 64 &c. hoc

est,

est, ut 1, 7, 19, 37, 61, &c, nempe ut differentiæ numero-



rum cubicorum continue proximorum; Quarum quidem differentiarum excessus, sive differentiarum differentiæ, sunt Arithmetice proportionales: Nam $1+6=7$. $7+12=19$. $19+18=37$. $37+24=61$. &c.

PROP. XXXIV. *Coroll.*

ET universaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos TMT, TMT, &c, æquales invicem facientibus; figuræ spirales continuæ, his rectis interpositæ sunt ad invicem, ut 1, 7, 19, 37, 61. &c.*

Nam (per prop. 30.) Figuræ spirales a principio ad has lineas continuatæ sunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c; Ergo Figuræ invicem continuè sequentes his rectis terminatæ sunt ut 1, 8 —

$1 = 7$. $27 - 8 = 19$, $64 - 27 = 37$, $125 - 64 = 61$. &c.
Vel ut $\frac{1}{3}c$, $\frac{7}{3}c$, $\frac{19}{3}c$, $\frac{37}{3}c$, $\frac{61}{3}c$. &c.

PROP. XXXV. *Coroll.*

Deniq; Figuræ spiralis portiones, quæ in singulis circulationibus de novo describuntur; (præter illud quod in præcedenti circulatione descriptum fuerat,) nempe quod intra spiralem primam continetur, quod inter primam & secundam, quod inter secundam & tertiam, quod inter tertiam & quartam, &c. sunt ad invicem ut 1, 6, 12, 18, 24, *&c. (addendo semper, post locum secundum, numerum senarium;) Nempe ut differentiæ differentiarum numerorum cubicorum.*

Sequitur ex 33. Quia $1, 7 - 1, 19 - 7, 37 - 19, 61 - 37$, &c. sunt ut 1, 6, 12, 18, 24. &c.

SCHOLIUM.

Hæc autem de areâ figuræ spiralis doctrina, continuis duodecim propositionibus jam tradita, consona est illis quæ tradit Archimedes circa finem libri de *Lineis Spiralibus*. Libet autem id ipsum paulo ulterius prosequi.

PROP. XXXVI. *Coroll.*

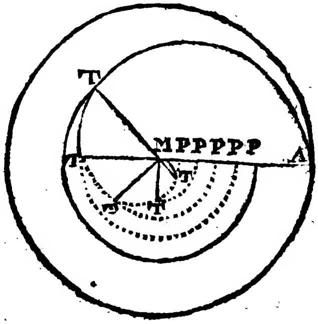
Complementum figuræ spiralis (quod nempe cum ipsa sectorem conterminum complet) est ad sectorem conterminum, ut 2 *ad* 3.

Sequitur hoc quidem ex prop. 24. Sed id ipsum aliter ostendemus hoc modo.

Constare supponamus figuram PMTT (complementum figuræ spiralis MTTM) ex infinitis arcubus PT, PT, &c. qui quidem sunt in duplicata ratione rectarum MP, MP, Arithmeticè proportionalium, (ut ostendimus ad prop. 11.) sector autem conterminus MPT, ex totidem constabit arcubus, ipsis MP,

MP, MP, proportionalibus, adeoq; Arithmetice proportionalibus, (ut patet:)

Est autem series ejusmodi, (in duplicata ratione Arithmetice proportionalium) $\frac{1}{3}$ seriei æqualium, (per prop. 21,) & series Arithmetice proportionalium $\frac{1}{2}$ ejusdem seriei æqualium (per prop 2) Ergo illa ad hanc (hoc est, complementum figuræ Spiralis ad Sectorem) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ (hoc est) ut 2 ad 3.



PROP. XXXVII. *Corollarium.*

Et speciatim; *Complementum figuræ spiralis unâ circulatione descriptæ, est ad circulum primum (ipsi conterminum) ut 2 ad 3.*

Nam constabit complementum illud ex infinitis arcubus PT, in ratione duplicata rectarum MP arithmetice-proportionalium (sive ut 0, 1, 4, 9, &c.) quorum maximus est integra peripheria A; constat autem circulus ille integer ex totidem peripheriis Arithmetice-proportionalibus, ut 0, 1, 2, 3, &c. quarum etiam maxima est eadem pæripheria A: Ideoq; Complementum illud, ad hunc circulum, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, hoc est, ut 2 ad 3.

PROP. XXXVIII. *Corollarium.*

S*patia* vero *quod figuris spiralibus in singulis circulationibus deest ad complendum suum circulum; sunt ut* 2, 5, 8, 11, 14, *&c. Arithmetice proportionales.*

Cum enim (posito circulo primo c) erunt (per prop. 29 & 33) figuræ spirales circulatione prima descripta $\frac{1}{3}c$, secunda $\frac{7}{4}c$, tertia $\frac{19}{4}c$, quarta $\frac{37}{4}c$. &c, circuli autem conterminis

 primus

primus $1c$, secundus $4c$, tertius $9c$, quartus $16c$, &c. erit excessus circulorum, supra figuras spirales conterminas, primi $\frac{2}{3}c$, secundi $\frac{5}{3}c$, tertii $\frac{8}{3}c$, quarti $\frac{11}{3}c$. &c. Nam $1c - \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}c$. $4c - \frac{7}{3}c = \frac{5}{3}c$. $9c - \frac{19}{3}c = \frac{8}{3}c$. $16c - \frac{37}{3}c = 11c$. &c.

SCHOLIUM.

Et quidem facile esset complures propositiones alias hisce similes adjungere, tam de ipsis figuris spiralibus quam earum complementis; tam quæ circulationibus integris describuntur, quam intermediis. Sed ex dictis facile poterit quilibet eas, si opus videbitur, supplere, ut non necesse sit diutius hîc morari. Et metuo ne jamjam nimius fuerim. Adjungam tamen unum aut alterum ex dictis Corollarium, (in eorum gratiam, qui dubitant, an possibile sit figuram aliquam rectilineam circulo æqualem esse:) Nempe ----

PAtet ex dictis; *Circulo cuilibet figuram aliquam rectilineam æqualem esse.*

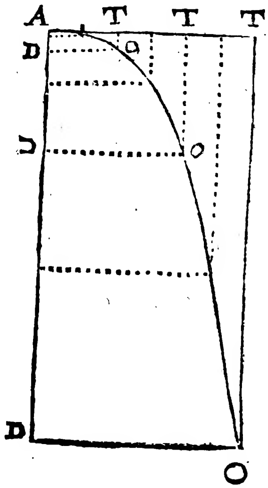
Cum enim patet (ex pr. 25.) circulo cuilibet figuram aliquam spiralem æqualem esse: & (ex prop. 16.) cuilibet figuræ spirali aliquam parabolam; & deniq; (ex pr. 23.) cuilibet Parabolæ aliquam figuram rectilineam, sequitur & cuilibet circulo figuram aliquam rectilineam æqualem esse.

Non sunt igitur vel rectilineum & circulus, vel linea recta & curva, quantitates adeo inter se heterogeneæ, quin & invicem rite comparari, & quidem invicem æquales esse possint: Quanquam fieri possit ut circuli diameter & perimeter eorumq; sint irrationales, ut nec veris numeris, nec etiam ullo adhuc in usum recepto notationis modo, earum ad invicem ratio exprimi possit.

POrro: Ex jam traditis innotescit etiam methodus *Rectam Parabolicæ (vel etiam Paraboloidicæ) æqualem quam proximè, inveniendi.*

Si enim, quæ semiparabolam rectam in vertice contingat recta AT, in quotlibet æquales particulas divisa; (quarum quælibet dicatur a, atq; numerus omnium n;) & in singularum

particularum terminis ad tangentem illam totidem ordinatim-applicentur rectæ, (Parabolæ diametro propterea parallelæ, & facientes ad Tangentem angulos rectos,) TO, TO, &c. quarum minima dicatur 1; erunt illæ ad invicem per prop. 23. ut numeri quadratici 1, 4, 9, 16, &c. & earum differentiæ ut 1, 3, 5, 7, &c. numeri impares deinceps ab unitate; (quarum differentiarum maxima erit $2n-1$.) Rectæ parallelarum illarum terminos (in linea Parabolica constitutos) connectentes, (quæ erunt propterea ipsi parabolæ deinceps inscriptæ,) erunt ut $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+9}$. $\sqrt{:a^2+25}$. $\sqrt{:a^2+49}$ &c. (quippe quarum quadrata per 47 e 1. æquantur quadratis tam particularum a, quam differentiarum inter proximas quasque parallelas, hoc est, numerorum imparium.) Quæ quidem rectæ (parabolæ inscriptæ) quo plures fuerint, eò propius ad parabolicæ mensuram accedet earum omnium aggregatum; ita tamen ut ex omnibus sic aggregata recta sit ipsâ parabolicâ minor.

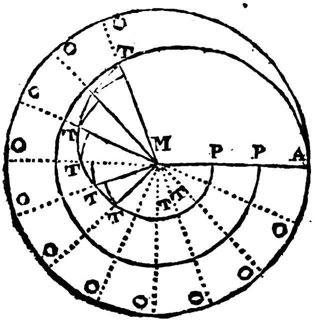


Sin velit aliquis rectam justa majorem (ut constet intra quos cancellos determinare possit parabolicæ longitudinem;) neque difficilis erit hæc investigatio, tangentium ope perficienda.

Si vero curva AOO, non supponatur Parabola, sed paraboloides Cubicale, Biquadricale, &c. Idem processus erit, mutatis mutandis, atque in Parabola. Sumendæ enim pro parallelarum differentiis, non 1, 3, 5, 7, &c. differentiæ numerorum Quadraticorum; sed 1, 7, 19, 37, &c. differentiæ numerorum cubicorum; vel 1, 15, 65, 175, &c. differentiæ numerorum Biquadraticorum; &c. prout Paraboloideos cujusq; natura postulet: adeoq; inscriptæ erunt $\sqrt{:a^2+1}$ $\sqrt{.a^2+49}$. &c. vel $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+225}$ &c. & sic deinceps. Ut ex inferius tradendis pr. 45. patebit.

EAdem fere methodo, *Invenietur recta Spirali genuinæ quam-proximè æqualis.*

Si enim (per ea quæ dicta sunt prop. 5.) supponatur inscribi figuræ spirali alia ex quotlibet sectoribus similibus conflata: Erunt (propter spiralem) tam sectorum arcus, quam horum sinus sive recti sive versi, ut & radii, arithmetice proportionales. Radiorum autem continuum augmentum dicatur a. Si igitur a sectoris cujusvis arcus initio ad radium per ipsius terminū ductū demitti supponatur perpendicularis, erit illa istius arcus sinus rectus, cujus quadratum simul cum quadrato sinûs versi communi augmento a aucti, æquabitur quadrato rectæ Spirali inscriptæ: (per 47 e 1.) Sinus autem versus ille dicatur v, & totius circuli sui diameter d; erit igitur quadratum sinus recti (ex ductu sinûs versi v in diametri residuum $d-v$ factum) $vd-v^2$; & quadratum sinûs versi communi augmento aucti (nempe $v+a$) erit $v^2+2va+a^2$: & propterea quadratum inscriptæ (ex his conflatum) $vd+2va+a^2$. Cum autem (propter æquales similium Sectorum angulos) eadem sit ubiq; sinûs versi ad diametrum ratio, esto ea quam habet 1 ad m (quæ ratio major minorve reputanda erit prout singulorum sectorum anguli majores minoresve fuerint:) Adeoq; cum sit $1.m::v.d$, erit $d=vm$: & propterea quadratum rectæ spirali inscriptæ $vd+2va+a^2=vvm+2va+a^2$. Deniq;, cum sint similium illorum sectorum deinceps positorum arcus, adeoq; & sinus versi, arithmetice proportionales, (ab o inchoati,) dicantur illi 0, 1, 2, 3. &c. Erunt ergo inscriptæ illæ $\sqrt{:0m+0a+a^2}$. $\sqrt{:1m+2a+a^2}$. $\sqrt{:4m+4a+a^2}$. $\sqrt{:9m+6a+a^2}$. $\sqrt{:16m+8a+a^2}$ Et sic deinceps. Quò autem plures supponantur eidem figuræ spirali sectores inscribi, eò propius ad lineam spiralem accedet rectarum



sic

ſic inſcriptarum aggregatum : quod tamen vera ſpirali perpetuo minus erit.

Si autem harum inſcriptarum prima omittatur, & illius vice poſt ultimam ſubjungatur quæ proximè erat inſecutura, (quod tantundem eſt atq; pro figura ex ſectoribus inſcripta, circumſcriptam ſubſtituere,) atq; tandem addatur a; habebitur ex omnibus aggregata recta quæ vera ſpirali major erit ; ſed quæ ad juſtam eo propius accedet quò plures ſupponantur Sectores adſcribi.

Et ſimili forma procedendum erit (mutatis mutandis) in aliis Spiralium generibus in Scholio Prop. 45. memoratis.

PROP. XXXIX. *Lemma.*

Si proponatur ſeries quantitatum in *Triplicata* ratione Arithmeticè-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum Cubicorum,) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 8, 27, 64, &c.) propoſitum ſit inquirere quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium ?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis (ut in prop. 1. & 19.) Eritq; $\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. $\frac{0+1+8=9}{8+8+8=24} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108} = \frac{4}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}.$$

$$\frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320} = \frac{5}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125=225}{125+125+125+125+125+125=750} = \frac{6}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216=441}{216+216+216+216+216+216+216=1512} = \frac{7}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24}.$$

Et ſic deinceps.

Ratio proveniens eſt ubiq; major quam ſubquadrupla, ſeu $\frac{1}{4}$.

Exceſ-

Exceſſus autem perpetuò decreſcit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$. &c. aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis, numero quaternario, (ut patet;) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o. Adeoq; ----

PROP. XL. *Theorema.*

SI proponatur ſeries quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum; ratio, quam habet illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ſubquadruplam ſuperabit; eritq; exceſſus, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o; ſive, quam habet radix cubica termini primi poſt o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.

Puta $\frac{l+1}{4} l^3 + \frac{l+1}{4l} l^3$ vel $\frac{n}{4} l^3 + \frac{n}{4l} l^3 = \frac{1}{4} n l^3 + \frac{1}{4} n l^2$.

Patet ex præcedente.

Cùm autem, creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra rationem ſubquadruplam ita continuò minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat, (ut patet;) Si in infinitum procedatur, prorſus evaniturus eſt. Adeóq; ----

PROP. XLI. *Theorema.*

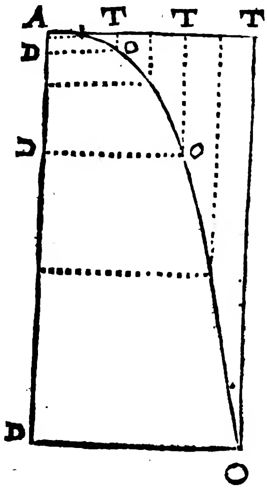
SI proponatur ſeries infinita quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continue creſcentium, a puncto ſeu o inchoatarum; erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1, ad 4.

Patet ex præcedente.

PROP.

PROP. XLII. *Corollarium.*

IDeoq; , Complementum semi-paraboloidis cubicalis, AOT, est ad Parallelogrammum TD (super eâdem vel æquali base æquè altum,) ut 1 ad 4. (Et, consequenter, ipsum semiparaboloides ad idem Parallelogrammum, ut 3 ad 4.)



Esto enim Semiparaboloidis cubicalis AOD (cujus diameter AD, ordinatim applicatæ DO, DO, &c.) complementum AOT (cujus diameter AT, ordinatim-applicatæ TO, TO, &c.) Quoniam igitur (per pr. 45. Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. vel ipsis æquales AT, AT, &c. sunt in subtriplicata ratione rectarum AD, AD, &c. vel ipsis æqualium TO, TO, &c. Erunt e contra ipsæ TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (constans ex infinitis rectis TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmeticè-proportionalium) erit ad Parallelogrammum TD, per præced. (constans ex totidem ipsi TO maximæ æqualibus) ut 1 ad 4. (Quod erat ostendendum.) Et consequenter, Semiparaboloides AOD (parallelogrammi residuum) ad idem parallelogrammum ut 3 ad 4.

PROP. XLIII. *Lemma.*

PAri methodo invenietur ratio seriei infinitæ quantitatum in ratione quadruplicata, quintuplicata, sextuplicata, &c. Arithmeticè proportionalium, a puncto seu o inchoatarum, ad seriem

 totidem

totidem maximæ æqualium. Nempe in Quadruplicatâ, erit ut 1 ad 5: in Quintuplicata, ut 1 ad 6: in sextuplicata, ut 1 ad 7. Et sic deinceps.

Facto enim experimento patebit rationes inductione repertas ad has continuo propiùs accedere, ita ut differentia tandem evadat quâvis assignabili minor; adeoq; in infinitum continuata evanescet.

Operosas demonstrationes lineares non adjungo; quas tamen, siquis postulet, poterit ille (modo vacet) tales exquirere figurarum inscriptione & circumscriptione, vel etiam aliàs præstandas; (quales habet Archimedes pr. 10, & 11, de lin. spiral.) ostendendo, quòd ratio neq; major neq; minor est quam assignata. At mihi sufficere videntur illæ quas produxi; Cavallerii *Methodum Indivisibilium* (quoniam eam invenio a Geometris jam esse receptam) secutus.

Nota tamen eas quibus usus sum demonstrationibus, potius figuras inscribendas imitari, cum supponant primum terminum 0. Si quis vero figuras circumscribendas imitari mallet, fieri quidem & illud potest, modo primus terminus ponatur 1.

Notandum etiam, rationes inductione quærendas, in seriebus illis quarum processus est in Arithmetice proportionalium ratione quadruplicata (& sequentibus) magis implicatas esse quam præcedentium.

Puta in Biquadratis $\frac{l+1}{5}l^4 + \frac{l+1}{10l}3l^4 + \frac{l+1}{30l^2}l^4 + \frac{-l-1}{30l^3}l^4$. Vel $\frac{n}{5}l^4 + \frac{3n}{10l}l^4 + \frac{n}{30l^2}l^4 - \frac{n}{30l^3}l^4 = \frac{1}{5}nl^4 + \frac{3}{10}nl^3 + \frac{1}{30}nl^2 - \frac{1}{30}nl$. (posito nempe termino primo 1, latere maximo l numero terminorum $n = l+1$.)

In Surdesolidis autem $\frac{l+1}{6}l^5 + \frac{l+1}{3l}l^5 + \frac{l+1}{12l^2}l^5 + \frac{-l-1}{12l^3}l^5$. Vel $\frac{n}{6}l^5 + \frac{n}{3l}l^5 - \frac{n}{12l^2}l^5 - \frac{n}{12l^3}l^5 = \frac{1}{6}nl^5 + \frac{1}{3}nl^4 + \frac{1}{12}nl^3 - \frac{1}{12}l^2$.

Sed (quod nobis sufficit) ad debitam rationem ita continuè

magis

magis accedunt, ut tandem differentia evadat quavis aſſignabili minor.

SCHOLIUM.

Si quis autem cupiat rationes hujuſmodi, utut intricatas, quæ ſequentibus ſeriebus finitis quibuſcunq; conveniat, (puta in ſextuplicatâ, ſeptuplicatâ, &c. ratione Arithmeticè proportionalium) invenire: quomodo illud fiat deinceps dicetur in Schol. prop. 108.

PROP. XLIV. *Theorema.*

IDeoq; ſi intelligatur ſeries infinita quantitatum, a puncto ſeu o inchoatarum, & continuè creſcentium pro ratione vel Arithmeticè-proportionalium, (quam ſeriem Lateralium ſive *Primanorum* appello,) vel eorum quadratorum, cuborum, biquadratorum, &c. (quam appello ſeriem *Secundanorum*, *Tertianorum*, *Quartanorum*, &c.) Erit totius ſeriei ratio, ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ ſequitur in hac Tabella. Nempe

Æqualium	$\frac{1}{1}$		1
Primanorum	$\frac{1}{2}$		2
Secundanorum	$\frac{1}{3}$		3
Tertianorum	$\frac{1}{4}$		4
Quartanorum	$\frac{1}{5}$		5
Quintanorum	$\frac{1}{6}$	Velut 1 ad	6
Sextanorum	$\frac{1}{7}$		7
Septimanorum	$\frac{1}{8}$		8
Octavanorum	$\frac{1}{9}$		9
Nonanorum	$\frac{1}{10}$		10
Decimanorum	$\frac{1}{11}$		11

Et ſic deinceps. Ita ut fractionum Denominatores, ſive Conſequentes rationum, ſint ab unitate Arithmetice proportionales; communis autem ſive Numerator ſive Antecedens 1.

PROP. XLV. *Corollarium.*

Hinc discimus methodum inveniendi aream complementi Parabolæ, & Paraboloideos Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis, aut superioris cujuslibet potestatis; & consequenter, etiam aream Parabolæ, aut Paraboloideos cujuscunq; potestatis. Quod ostendere pollicitus sum ad prop. 48. *Con.* Sect.

Nempe, cùm complementum Parabolæ (vel Semiparabolæ) sit series secundanorum, (ut diximus ad prop. 23;) complementum Paraboloidis cubicalis (vel semiparaboloidis,) series Tertianorum, (ut diximus ad prop 42;) atq; (eâdem ratione) complementum Paraboloidis Biquadraticalis, series Quartanorum; complementum Paraboloidis surdesolidalis, series Quintanorum; & sic deinceps: Erit horum ratio ad Parallelogrammum circumscriptum, (series nempe totidem maximo æqualium,) ea quæ est 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, & sic deinceps: juxta tabellam propositionis præcedentis. Et consequenter, ipsa Parabola, Paraboloides Cubicale, Biquadraticale, Surdesolidale, &c. (quæ nempe cum suis complementis æquantur Parallelogrammis circumscriptis) sunt ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6. &c.

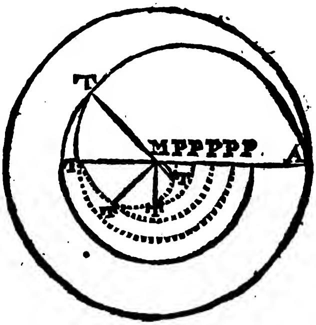
SCHOLIUM.

Et hoc quidem pacto licebit infinitis figuris curvilineis æquales rectilineas constituere. Quodq; in sola Parabola (summa cum admiratione) præstitit Archimedes (& post illum alii;) id nos in Paraboloide cujuscunq; potestatis jam præstitimus.

Quæ autem de Parabolis & Paraboloidibus hucusq; tradita sunt, aut etiam adhuc deinceps tradenda, possunt etiam Spiralibus facillimo negotio accommodari. Si enim supponamus rectam MT continuè augeri, non quidem in eadem ratione cum angulo PMT, (ut in Spirali Archimedea,) sed in ejusdem ratione duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. orientur alia atq; alia Spiralium genera: quarum tamen ad peripheriam vel arcum (eo sensu quo dictum est in Schol. prop. 13. & 15.) ratio

non

non minus innoteſcet (ut & figurarum adjacentium ratio ad circulum vel ſectorem) quam in illa Archimedea. Exſempli gratia. *Si augeatur recta MT in duplicata ratione anguli PMT; erit linea Spiralis (a principio inchoata) MT, ad arcum conterminum PT, ut* 1 *ad* 3; (quippe erit ſpiralis illa, ſeries Secundanorum; arcus autem, ſeries Æqualium:) *Et Figura adjacens erit ad conterminum Sectorem, ut* 1 *ad* 4; (nempe ut ſeries Tertianorum ad ſeriem Æqualium:) *Et ſimiliter, ſi creſcat recta MT in anguli MPT ratione Triplicata, Quadruplicata, &c. Erit Spiralis (ſenſu quo ſupra) ad conterminum Arcum, ut 1 ad 4, 5, &c; & Figura adjacens ad ſectorem conterminum, ut 1 ad 5, 6, &c.* Quæ omnia eodem modo (mutatis mutandis) demonſtrabuntur, quo prop. 5, 24. &c. Atq; hinc quidem ſpiralium doctrina in immenſum augeri poſſit. Cum autem id ſuo quilibet Marte per jam dicta ſatis poſſit intelligere, neq; nobis ſit animus labore ſupervacaneo hæc ulterius ampliandi: ſufficiat id in tranſitu monuiſſe.



Sed & hinc etiam facilis eſſet tranſitus ad Spirales non tantum in plano, ſed in ſolido deſcriptas, puta in ſuperficiebus Coni & Sphæræ, ſive etiam conoidum & ſphæroidum, rite conſiderandas; &, ad ſpirales aut Circulos in Cylindro comparandas: Figuras item illis adjacentes, ad figuras adjacentes hiſce. Adhibitis tamen iis, quæ de ſeriebus auctis & diminutis deinceps ſecuturæ ſunt, propoſitionibus. Hæc autem omnia, ne nimius ſim, intacta prætereunda judico: Cum ea quilibet, ex iis quæ hic tradita ſunt vel deinceps tradenda, facile poſſit deducere.

PROP. XLVI. *Lemma.*

Item (*per prop.* 44.) Data ratione quam habet ſeries una, cujuſlibet poteſtatis, (ad ſeriem æqualium;)

 reperitur

reperitur ratio quam habet alia ſeries alterius cujuſvis poteſtatis, (ad ſeriem item æqualium:) inveniendo nempe homologum terminum progreſſionis Arithmeticæ.

Ut, ſi Quadratorum ſive Secundanorum ſeries ſit $\frac{1}{3}$ ſeriei æqualium; erit ſeries Lateralium ſive Primanorum $\frac{1}{2}$ ſeriei æqualium: Quia, ut ſeries Primanorum media eſt inter ſeriem Æqualium & ſeriem Secundanorum, ſic 2 (conſequens rationis quæſitæ Primanorum) eſt media Arithmetica inter 1 & 3 (conſequentes rationum æqualium & ſecundanorum.) Sic cum cuborum ſive Tertianorum ratio ſit $\frac{1}{4}$ ſive 1 ad 4, inter quam ſeriem & ſeriem æqualium, duarum poteſtatum ſeries interjiciuntur; quærendæ ſunt duæ mediæ Arithmeticæ inter 1 & 4, puta 2 & 3, quarum illa Primanis, hæc Secundanis convenit. Et ſic in cæteris.

Et ſimiliter, ſi quærenda ſit ratio ſuperioris poteſtatis ſeriei conveniens; id reperitur progreſſionem continuando ad terminum quæſitum uſq;: Ut, ſi ſeries quartanorum rationem habent, ad ſeriem æqualium, eam quæ eſt 1 ad 5 ſive $\frac{1}{5}$; ſeries ſextanorum habebit rationem 1 ad 7: quia in progreſſione Arithmetica ubi terminus (poſt unitatem) quartus eſt 5, terminus ſextus erit 7. & pariter in reliquis.

PROP. XLVII. *Lemma.*

Atq; hæc regula non minus valebit ſi exponatur ſeries quantitatum quarumlibet (non quidem juxta ſeriem Primanorum, ſed) juxta quamvis aliam Tabellæ ſeriem, & de illarum Quadratis, Cubis, &c. inquiratur.

Verbi gratia. Si intelligatur ejuſmodi ſeries quantitatum quarumlibet ſecundum ſeriem Secundanorum (quibus aſſignatur in Tabella ratio 1 ad 3) diſpoſitarum: harum quadratis conveniet ratio 1 ad 5; (quia 1, 3, 5, ſunt arithmetice proportionales;) & cubis conveniet ratio 1 ad 7; & ſic deinceps

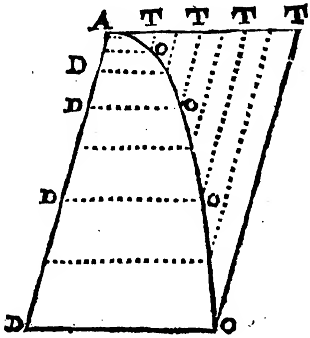
ceps; quia 1,3,5,7,&c. sunt Arithmetice proportionales, prout Unitas, Radix, Quadratum, Cubus,&c. sunt potestates proximè sequentes & Geometricè proportionales.

Nec hoc aliud est, quam quod habetur in Tabella; nam si quantitates assumptæ sint series Secundanorum, cujus ratio est $\frac{1}{3}$; earum quadrata erunt series Quartanorum, cujus ratio $\frac{1}{5}$; & earundem cubi erunt series Sextanorum, cujus ratio $\frac{1}{7}$; &c. ut dictum est.

PROP. XLVIII. *Corollarium.*

ET consequenter, *Conoides vel Pyramidoides complemento Semi-parabolæ (circa ipsius diametrum) aptandum, est ad Cylindrum vel Prisma super æquali base æquè altum, ut* 1 *ad* 5.

Nempe si complementum semi-parabolæ rectæ, AOT, manente recta AT, circumvolvatur, ut describatur Conoides rectum: vel, universaliter, si (juxta methodum a nobis indicatam prop. 5, 6,9. Con. Sect.) diametro vel axi AT, ordinatim-applicentur circuli, vel similia quævis plana, quorum vel radii vel rectæ similiter positæ rationem eandem habeant inter se quā rectæ TO,TO, &c. ut compleatur Conoides vel Pyramidoides sive rectum sive inclinatum: dico illud Conoides vel Pyramidoides esse ad Cylindrum vel Prisma super eadem basi æquè altum ut 1 ad 5. Nam, cùm rectæ omnes TO, TO, &c. sunt series Secundanorum, (quibus convenit ratio 1 ad 3;) similia quælibet plana super has rectas similiter constituta, erunt inter se ut harum rectarum quadrata; sive in duplicata ratione rectarum TO,TO; At ratio seriei rectarum illarum conveniens (seriei quippe secundanorum



eundanorum) est 1 ad 3; ergo ſeriei planorum conveniet ratio 1 ad 5: quia nempe 1, 3, 5, ſunt Arithmetice-proportionales: (prout Unitas, Radix, & quadratum ſunt Geometricè-proportionales.) Et quidem, ſi rectæ TO, TO, &c. ſint ſeries Secundanorum; earum quadrata (vel plana quadratis proportionalia) erunt ſeries quartanorum; cui in Tabella convenit ratio 1 ad 5.

PROP. XLIX. *Corollarium.*

ET ſimiliter; *Si complemento ſemiparaboloidis cubicalis aptetur (circa ipſius Diametrum) Conoides vel Pyramidoides; erit hoc ad Cylindrum vel Priſma (ſuper eadem vel æquali baſe æquè altum,) ut* 1 *ad* 7.

Nam, cum rectæ TO, TO, &c. (in complemento Semiparaboloidis Cubicalis,) ſint ſeries Tertianorum, quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4; horum quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) ſeriei conveniet ratio 1 ad 7; quia 1, 4, 7, ſunt Arithmetice proportionales. Vel etiam, quia plana ſunt ſeries Sextanorum, quibus in Tabella aſſignatur ratio 1 ad 7.

PROP. L. *Corollarium.*

ET pariter; *ſi ſemiparaboloidum aliorum (puta Biquadraticalium, Surdeſolidalium, &c.) complementis aptetur (circa eorum diametros) Conoides vel Pyramidoides aliquod; habebit illud ad Cylindrum vel Priſma (ſuper æquali baſe æquè altum) rationem notam (puta* 1 *ad* 9, 1 *ad* 11, *&c.)*

Cum enim complementorum illorum rectæ ſint ſeries quartanorum, quintanorum, &c. adeoque rationes in Tabellâ aſſignatas habeant 1 ad 5, 1 ad 6, &c. ſeries quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) rationem habebunt 1 ad 9, 1 ad 11, &c. quia 1, 5, 9, vel 1, 6, 11, &c. ſunt arithmetice

metice proportionales. Vel etiam, quia si rectæ sint series Quartanorum, Quintanorum, &c. plana similia ad has rectas similiter posita, erunt series Octavanorum, Decimanorum, &c. quibus convenit ratio 1 ad 9, 1 ad 11, &c.

SCHOLIUM.

Atq; hoc pacto figurarum solidarum superficiebus curvis comprehensarum ingens multitudo reduci possunt ad alias superficiebus planis comprehensas; & corpora non modo conica (quod docuerunt veteres) sed & alia quamplurima conoidica, ad cylindrum reduci. Quod nescio an quispiam alius antehac ostenderit.

PROP. LI. *Lemma.*

Juxta eandem regulam (prop. 46, 47.) Si exponatur series quantitatum quarumlibet, juxta quamlibet Tabellæ seriem; de illarum radicibus quadraticis, cubicis, &c. aut quibusvis intermediis potestatibus, pariter inquirendum erit.

Exempli gratia; si exponantur infinita Quadrata (vel quælibet plana similia) juxta seriem Quartanorum; (cui assignatur, in Tabella, ratio 1 ad 5:) series laterum (vel rectarum in illis similiter positarum) rationem habebit (ad seriem æqualium) 1 ad 3: quia 1, 3, 5, sunt arithmetice proportionalia: vel etiam, quia ubi plana sunt series Quartanorum, eorum latera erunt series secundanorum, quibus assignatur in Tabellâ ratio 1 ad 3.

Sic, si exponantur cubi infiniti (vel quælibet similia solida) juxta seriem sextanorum, quibus in Tabella congruit ratio 1 ad 7; eorum lateribus cubicis (vel rectis in his similiter positis) conveniet ratio 1 ad 3; & horum laterum quadratis (vel planis in cubis illis similiter positis) ratio 1 ad 5; quia duarum mediarum arithmeticarum inter 1 & 7, minor est 3, major 5. (sunt enim 1, 3, 5, 7, arithmetice proportionalia: duas autem medias Arithmeticas interpono inter 1 & 7; quia totidem supponimus medias Geometricas. inter unitatem & cubum, nempe Latus

& quadratum; sunt enim Unitas, Latus, Quadratum, Cubus, Geometrice proportionalia. Et quidem si Cubi sint series sextanorum, Latera erunt series secundanorum; & laterum quadrata, series quartanorum; quibus in Tabella conveniunt rationes 1 ad 3, 1 ad 5.

Si vero quantitates expositæ in eadem serie sextanorum, essent quadrata (vel plana quælibet similia) eorum lateribus conveniret ratio 1 ad 4. quia inter 1 & 7 media Arithmetica est 4; sicut inter unitatem & quadratum media Geometrica est Radix vel Latus. Et quidem si quadrata sint series sextanorum, eorum Latera erunt series tertianorum; quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4.

PROP. LII. *Corollarium.*

ET propterea; *Ex cognitis rationibus quas habent Conoidea & Pyramidoidea, prop.* 48, 49, 50, *memorata, (ad Cylindrum vel Prisma, super æquali base æquealtum;) cognoscentur rationes quas habent plana illa unde construuntur, ad Parallelogrammum circumscriptum. Nempe complementum Semiparabolæ ut* 1 *ad* 3*: complementa Semiparaboloidis Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis &c. ut* 1 *ad* 4, 1 *ad* 5, 1 *ad* 6. *&c.*

Si enim Conoidea ad Pyramidoidea illa cognoscantur esse series quartanorum, Sextanorum, Octavanorum, Decimanorum, &c. Eisq; convenire rationes 1 ad 5, 1 ad 7, 1 ad 9, 1 ad 11, &c. Eorum lateribus (quæ propterea sunt series Secundanorum, Tertianorum, quartanorum, Quintanorum, &c.) conveniunt rationes 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, &c. Quia 1,3,5, item 1,4,7, item 1,5,9, item 1,6,11, &c. sunt Arithmeticè proportionales.

PROP. LIII. *Lemma.*

His intellectis; patet aditus ad investigationem rationum quas (ad seriem maximæ æqualiū) habere dicantur ejusmodi series Radicum Quadratarum, Cubicarum, Biquadraticarum, &c. nume-

numerorum sive quantitatum arithmetice-proportionalium, a puncto vel o inchoatarum; (puta $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. $\sqrt{c\,0}$, $\sqrt{c1}$, $\sqrt{c2}$, $\sqrt{c3}$, &c. $\sqrt{qq\,0}$, $\sqrt{qq1}$, $\sqrt{qq2}$, $\sqrt{qq3}$, &c.) Quas appello series Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum; &c.

Exsempli gratia. Si exponantur ejusmodi infinita Quadrata Arithmeticè-proportionalia, sive juxta seriem Primanorum; quibus in Tabellâ assignatur ratio 1 ad 2: Eorum Lateribus, (hoc est, seriei subsecundanorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{2}$ (sive 2 ad 3;) quia 1, $1\frac{1}{2}$, 2, sunt Arithmetice proportionalia.

Item, si supponantur ejusmodi infiniti Cubi Arithmeticè-proportionales, sive juxta seriem Primanorum; quibus convenit in Tabella, ratio 1 ad 2. Illorum radicibus cubicis, (hoc est seriei subtertianorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{3}$ (vel 3 ad 4:) & harum radicum quadratis, ratio 1 ad $1\frac{2}{3}$ (vel 3 ad 5:) Quia scilicet 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2. sunt Arithmeticè-proportionalia; sicut Unitas, radix, quadratum, & Cubus, sunt Geometricè-proportionalia.

Et pari modo, si infinita Biquadrata, Surdesolida, &c. constituta intelligantur juxta seriem Primanorum, quibus convenit ratio 1 ad 2; eorum radicibus Biquadraticis, Surdesolidalibus, &c. convenient rationes 4 ad 5, 5 ad 6, &c. vel 1 ad $1\frac{1}{4}$, 1 ad $1\frac{1}{5}$ &c. quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, 2; item 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $1\frac{4}{5}$, 2; &c. sunt Arithmetice-proportionalia. Adeoq; --

PROP. LIV. *Theorema.*

SI intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu o inchoatarum, & continue crescentium pro ratione Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c, numerorum Arithmeticè proportionalium; (quam appello seriem *Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c.*) Erit totius ratio ad seriem totidem maxime æqualium, ea

quæ ſequitur in hac Tabella: Nempe

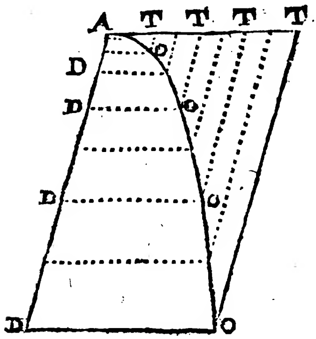
Subſecundanorum	$\frac{2}{3}$	Vel ut 1 ad	$1\frac{1}{2}$.
Subtertianorum	$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{3}$.
Subquartanorum	$\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{4}$.
Subquintanorum	$\frac{5}{6}$		$1\frac{1}{5}$.
Subſextanorum	$\frac{6}{7}$		$1\frac{1}{6}$.
Subſeptimanorum	$\frac{7}{8}$		$1\frac{1}{7}$.
Suboctavanorum	$\frac{8}{9}$		$1\frac{1}{8}$.
Subnonanorum	$\frac{9}{10}$		$1\frac{1}{9}$.
Subdecimanorum	$\frac{10}{11}$		$1\frac{1}{10}$.

Et ſic deinceps.

Patet ex præcedente.

PROP. LV. *Coroll.*

ERgo, *Planum ſemi-parabolæ (vel etiam Parabolæ) eſt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 2 ad 3. (Et conſequenter ipſius complementum eſt ad idem Parallelogrammum ut 1 ad 3.)*



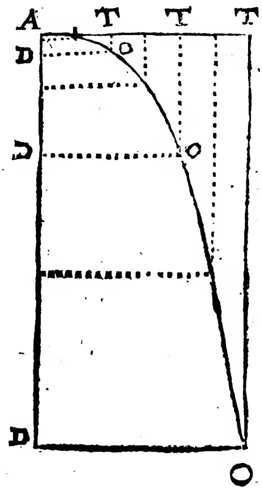
Eſt enim Planum Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) ſeries infinita ſubſecundanorum (per 8 prop. Con. Sect.) Parallelogrammum autem ſeries totidem maximæ æqualium: Ergo illud ad hoc ut 1 ad $1\frac{1}{2}$ vel ut 2 ad 3. (et, conſequenter, ipſius complementum, nempe Parallelogrammi reſiduum, ut 1 ad 3.)

PROP.

PROP. LVI. *Coroll.*

ITem, *Planum Semi-paraboloidis (vel etiam Paraboloidis) cubicalis, est ad Parallelogrammum circumscriptum, ut* 3 *ad* 4. (*& consequenter, ipsius Complementum, est ad idem Parallelogrammum, ut* 1 *ad* 4.)

Cum enim (per 45. Prop. Con. Sect.) ordinatim-applicatę in Paraboloide cubicali sint in subtriplicata ratione diametrorum (sive distantiarum a vertice) erit planum ex illis omnibus conflatum series subtertianorum; quæ se habet ad seriem totidem maximo æqualium (hoc est, ad Parallelogrammum circumscriptum,) ut 1 ad $1\frac{1}{3}$, sive ut 3 ad 4. (Et consequenter, ipsius complementum, nempe parallelogrammi residuum, est ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.)



PROP. LVII. *Corollarium.*

EOdem modo, *Planum Semi-paraboloidis (vel Paraboloidis) Biquadraticalis, Surdesolidalis, aut superioris cujusvis potestatis, ratio ad Parallelogrammum circumscriptum nota erit; puta ut* 4 *ad* 5, 5 *ad* 6, *&c.* (*Et consequenter, ipsorum etiam complementa ad eadem Parallelogramma rationem notam habebunt; puta ut* 1 *ad* 5, 1 *ad* 6. *&c.*)

Sunt enim illa plana series subquartanorum, subquintanorum, &c. ideoque, ad series Æqualium, ut 4 ad 5; 5 ad 6; &c. &, consequenter, eorum complementa (quæ quidem sunt series Quartanorum, Quintanorum, &c.) ut 1 ad 5, 1 ad 6, &c.

SCHOLIUM.

Adeoque & per hanc etiam Tabellam, licet Parabolarum, & Paraboloidium cubicalis, biquadraticalis, aut superioris cujuslibet potestatis, & eorundem etiam Complementorum, aream invenire: quod pollicitus sum ad Prop. 48. Con. Sect. & supra præstiti ad Prop. 45. hujus.

PROP. LVIII. *Lemma.*

T*Andem, ope ejusdem Regulæ (prop.* 46.) Si proponatur ejusmodi series infinita quantitatum, a puncto vel o inchoatarum, & continuè crescentium, pro ratione Potestatis (non simplicis tantum cujusvis, sed &) compositæ: ratio quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, investigatur. Puta Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. aut etiam Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Vel Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c; aut Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. Aut etiam quocunq; modo compositæ.

Exsempli gratia, Cum series subtertianorum (puta $\sqrt{c}\,0$, $\sqrt{c}\,1$, $\sqrt{c}\,2$, $\sqrt{c}\,3$, &c.) rationem habeant (ad seriem totidem maximæ æqualium) eam quæ est 3 ad 4, seu 1 ad $1\frac{1}{3}$: Eorum quadrata (quę eadem sunt & radices cubicę secundanorum, puta $\sqrt{c}\,0$, $\sqrt{c}\,1$, $\sqrt{c}\,4$, $\sqrt{c}\,9$, &c.) rationem habebunt ad totidem maxime æqualia, eam quæ est 1 ad $1\frac{2}{3}$, vel 3 ad 5. Quia nempe 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, vel $\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$, sunt arithmetice proportionalia.

Pariter, seriei subquartanorum cubi, vel (quod tantundem est) radices biquadraticæ seriei cuborum vel tertianorum; rationem habebunt ad seriem Æqualium, ut 4 ad 7. Cum enim series subquartanorum rationem habeat in Tabella 1 ad $1\frac{1}{4}$ vel

4

4 ad 5: eorum cubi rationem habebunt (ad ſeriem totidem maximo æqualium) ut 1 ad $1\frac{3}{4}$, vel 4 ad 7. Quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, vel $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, ſunt Arithmetice-proportionalia, ſicut Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, &c. ſunt Geometrice-proportionalia.

Et ſimiliter in poteſtatibus magis adhuc compoſitis; puta Radices quadraticæ cuborū ſeriei ſubquintanorum. Nam ſeriei ſubquintanorū convenit ratio 1 ad $1\frac{1}{5}$ vel 5 ad 6; ergo eorum cubis conveniet ratio 1 ad $1\frac{3}{5}$ vel 5 ad 8 (quia nempe 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, vel $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$, ſunt Arithmetice-proportionalia;) & eorū Radicibus quadratis, ratio 1 ad $1\frac{3}{10}$, vel 10 ad 13, (quia nempe $1\frac{3}{10}$ eſt medium Arithmeticum inter 1 ad $1\frac{3}{5}$, ſunt enim 1, $1\frac{3}{10}$, $1\frac{6}{10} = 1\frac{3}{5}$ vel $\frac{10}{10}$, $\frac{13}{10}$, $\frac{16}{10}$, $= \frac{8}{5}$, Arithmetice proportionalia,) Vel etiam cum radices quadraticæ ſubquintanorum ſint ſeries ſubdecimanorum; cui convenit ratio 10 ad 11 vel 1 ad $1\frac{1}{10}$: Harum radicum Cubi rationem habebunt eam quæ eſt 10 ad 13 vel 1 ad $1\frac{3}{10}$: Quia 1, $1\frac{1}{10}$, $1\frac{2}{10}$, $1\frac{3}{10}$ vel $\frac{10}{10}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{13}{10}$, ſunt quatuor termini arithmetice proportionales.

Atque eodem modo, in ſeriebus aliarum Poteſtatum utcunque compoſitarum, earundem ratio ad ſeriem æqualium inveſtigabitur. Adeoque ----

PROP. LIX. *Theorema.*

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, a puncto ſeu o inchoatarum, & continuè creſcentium pro ratione poteſtatis cujuſvis ex ſimplicibus (prop. 44 & 54 memoratis) compoſitæ; erit totius ratio ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ ſequitur in hac Tabella. Nempe

Seriei

Radices	Æqualium	Primanorum	Secundanorum	Tertianorum	Quartanorum	Quintanorum	Sextanorum	Septimanorum	Octavanorum	Nonanorum	Decimanorum
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$
Quadraticæ	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$
Cubicæ	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{13}$
Biquadrat.	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{14}$
Surdesolidæ	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{15}$
Sextanæ	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{6}{16}$
Septimanæ	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{17}$
Octavanæ	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{18}$
Nonanæ	$\frac{9}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{9}{19}$
Decimanæ	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{10}{19}$	$\frac{10}{20}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

PROP. LX. *Corollarium.*

ERgo, *Conoidea & Pyramidoidea Parabolica & Paraboloidica; quæ nempe Parabolæ, Paraboloidi cubicali, biquadraticali, surdesolidali, &c. aptantur; sunt ad Cylindrum et prisma circumscriptum (vel aliud quodvis super æquali base æquè altum) ut* 2 *ad* 4, 3 *ad* 5, 4 *ad* 6, 5 *ad* 7. *&c.*

Cum

Cum enim Parabolæ, & Paraboloidum illorum plana sint series rectarum in ratione subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, subquintanorum, &c. sive ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, surdesolidæ, &c. Primanorum: Conoidea & Paraboloidea sic aptata, sunt series planorum in duplicata ratione istarum rectarum; & propterea, ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, surdesolidæ &c. secundanorum: quibus in tabella assignantur rationes illæ 2 ad 4, 3 ad 5, 4 ad 6, 5 ad 7, &c.

PROP. LXI. *Corollarium.*

Sed & hinc innotescit methodus quadrandi non modò Parabolam sed & Paraboloidea omnia (eorúmq; complementa) non modò ea quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem simplicis alicujus potestatis, (de quibus dictum est prop. 55, 56, 57, item prop. 23, 45.) Sed & juxta rationem potestatis cujusvis ex simplicibus compositæ. Puta; si ordinatim-applicatæ sint in diametrorum ratione duplicata subtriplicata, subquintuplicata, subseptuplicata, &c. vel triplicatæ subquadruplicata, subquintuplicata, &c. rationem habebunt ad Parallelogrammum circumscriptum eam quam habent 3 ad 5, 5 ad 7, 7 ad 9, &c. 4 ad 7, 5 ad 8, &c. Et eorum complementa (quorum ordinatim-applicatæ erunt propterea in suarum diametrorum ratione subduplicatæ triplicata, quintuplicata, septu[illegible]*, &c. item subtriplicatæ quadruplicata, quintu*[illegible]* &c.) rationem habebunt 2 ad 5, 2 ad 7, 2 ad 9, [illegible] 3 ad 8, &c. Et similiter in cæteris: juxta [illegible] cedentis Tabellæ, prop. 59.*

Nam si ordinatim applicatæ sint in [illegible] rum ratione duplicatæ subtriplicata, erit plan[illegible] rum quę se habent ad invicem ut quadrata [illegible] (vel radices cubicæ quadratorum) [illegible] ice

proportionalium ſive ut radices cubicæ ſecundanorum; quibus in Tabellâ convenit ratio 3 ad 5.

Et hujus complementum ordinatim-applicatas habebit in diametrorum ſuarum ratione ſubduplicatæ triplicata (quod tali argumento probabitur, quo uſus ſum ad Prop. 23.) & propterea planum illud erit ſeries radicum quadraticarum cuborum ſive Tertianorum; quibus aſſignatur in Tabellâ ratio 2 ad 5.

Et pariter de aliis judicandum.

SCHOLIUM.

Atque hoc pacto aliæ adhuc figuræ curvilineæ (præter eas quas innuimus ad Prop. 45, & 57.) ad æquales rectilineas reducuntur. Nempe omnia cujuſcunque generis Paraboloidea, & eorum complementa.

PROP. LXII. *Corollarium.*

ATq; exinde etiam patet methodus ad æqualia Cylindros & priſmata reducendi Conoidea & Pyramidoidea omnia Parabolica & Paraboloidica (non modo qualia memorantur prop. 60, ubi planorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſimplicis alicujus poteſtatis, ſed &) etiam quæ aptantur ejuſmodi Paraboloidibus (qualia memorantur prop. 61.) quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſeriei alicujus poteſtatis compoſitæ.

Exſempli gratia: Si paraboloidis ordinatim applicatæ ſint in diametrorum ratione ſubtriplicatæ-duplicata (vel ſubtriplicata duplicatæ) erit iſtius planum rectarum ſeries infinita in ratione radicum cubicarum ſecundanorum: & propterea Conoides vel Pyramidoides erit ſeries totidem planorum in earundem rectarum ratione duplicata, ideoque radicum cubicarum Quartanorum; & propterea (juxta tabellam Prop. 59.) ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 3 ad 7.

Item, ſi Paraboloidis ordinatim-applicatæ ſint in diametrorum ratione ſubquadruplicatæ triplicata; erunt plana Conoidis

dis vel Pyramidoidis, in earundem diametrorum ratione subquadruplicatæ-sextuplicata (sive, quod tantundem valet, subduplicatæ-triplicata,) ideoque Conoides vel Pyramidoides illud (ex istorum planorum serie conflatum) ad cylindrum vel Prisma circum-scriptum, ut 4 ad 10, vel 2 ad 5.

Et pariter in aliis juxta tenorem Tabellæ.

PROP. LXIII. *Corollarium.*

Eodem modo; Eorundem Semi-Paraboloidum complementis aptata Conoidea & Pyramidoidea, ad æqualia Cylindros & Prismata reducuntur.

Exsempli gratia. Si semi paraboloidis complementum ordinatim applicatas habeat in diametrorum ratione subduplicatæ triplicata, erit planum illud rectarum series infinita in ratione radicum quadraticarum cuborum sive Tertianorum, & proinde Conoides vel Pyramidoides huic aptatum, erit series totidem Planorum in earundem rectarum ratione duplicata, adeoque in diametrorum ratione subduplicatæ-sextuplicata (seu, quod tantundem valet, in diametrorum ratione triplicata:) erit igitur ad cylindrum vel Prisma circumscriptum, ut 2 ad 8, vel 1 ad 4.

Item, si semi-paraboloidis complementum ordinatim-applicatas habeat in diametrorum ratione subtriplicatæ-quadruplicata; erunt plana Conoidis vel Pyramidoidis in earundem diametrorum ratione subtriplicatæ-octuplicata; & propterea ut radices cubicæ octavanorum; adeoque Conoides vel Pyramidoides illud, ad cylindrum vel Prisma circumscriptum, ut 3 ad 11.

Et pariter de aliis judicandum est juxta Tabellam præmissam.

SCHOLIUM.

Docuimus igitur, quo modo Parabolæ & Paraboliodea omnia cujuscunque generis, & eorum complementa, ad Parallelogramma: Et eorundem Conoidea & Pyramidoidea ad cylindros & Prismata; reduci possunt. Adeoque infinita Proble-

mata solvimus quæ nemo (quantum scio) antea suscepit, nedum exsequutus est.

Placet autem, adhuc ex Tabellis omnibus præcedentibus (Prop. 44, 54, 59.) hoc universale Theorema colligere, (quod quidem convenit cum Regula Prop. 46.) Nempe ---

PROP. LXIV. *Theorema.*

SI intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu o inchoatarum, & continue crescentium pro ratione cujuscunq; potestatis, sive simplicis sive ex simplicibus compositæ; erit totius ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ est Unitatis ad Indicem istius potestatis unitate auctum.

Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. (sive potestatis Lateralis, Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) indicem statuo 1, 2, 3, 4, &c. subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. (sive Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. primanorum, sive arithmetice proportionalium) indicem statuo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. Potestatis cujusvis compositæ indicem facio ex componentium indicibus compositum: Puta secundanorum cubi (vel Tertianorum quadrata) indicem habent $6 = 2 \times 3$: subsecundanorum Radices cubicæ (vel subtertianorũ Radices Quadraticæ) indicem habent $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$: Cubi Radicum quadraticarum Quintanorum, indicem habebunt $\frac{15}{2} = 3 \times \frac{1}{2} \times 5$.

Rationes autem his potestatibus (in Tabellis) assignatæ, sunt hujusmodi. Puta, Primanis, Secundanis, Tertianis, Quartanis, &c. 1 ad 2, 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, &c. hoc est 1 ad 1 + 1, 1 ad 2 + 1, 1 ad 3 + 1, 1 ad 4 + 1, &c. Subsecundanis, Subtertianis, subquartanis, &c. 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5 &c. vel 1 ad $1\frac{1}{2}$, 1 ad $1\frac{1}{3}$, 1 ad $1\frac{1}{4}$, &c. hoc est 1 ad $\frac{1}{2} + 1$, 1 ad $\frac{1}{3} + 1$, 1 ad $\frac{1}{4} + 1$. &c. Tertianorum Quadratis (sive sextanis) 1 ad 7, hoc est, 1 ad 6 + 1. Tertianorum Radicibus Quadraticis 2 ad 5, sive 1 ad $\frac{5}{2}$, hoc est 1 ad $\frac{3}{2} + 1$. Subsecundanorum radicibus cubicis (sive subsextanis) 6 ad 7, sive 1 ad $\frac{7}{6}$, hoc est 1 ad $\frac{1}{6} + 1$. Cubis radicum quadraticarum quintanorum, (sive quindecimano-

rum

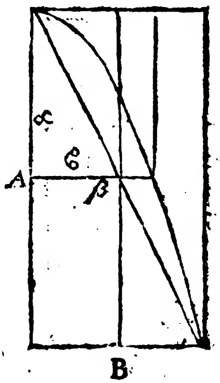
rum radicibus quadraticis,) 2 ad 17, sive 1 ad $\frac{17}{2}$, hoc est 1 ad $\frac{15}{2}+1$. (Et sic de cæteris.) quod affirmat Theorema. Sin Index supponatur irrationalis, puta $\sqrt{3}$; erit ratio, ut 1 ad $1+\sqrt{3}$. &c.

PROP. LXV. *Theorema.*

Ex cognita ratione quam habet qualibet series ad seriem Æqualium, cognoscitur ratio quam habet qualibet ad quamlibet aliam.

Exempli gratiâ. Parabola ad triangulum, (hoc est series subsecundanorum ad seriem primanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ vel ut 4 ad 3. Semi-parabolæ complementum ad Triangulum, vel etiam Conus ad Conoides Parabolicum, (hoc est series secundanorum ad seriem primanorum,) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut 2 ad 3. Semi-parabola ad suum complementum, (hoc est series subsecundanorum ad seriem secundanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$, vel ut 2 ad 1. Sic Parabola ad paraboloides cubicale, ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, vel ut 8 ad 9: Et Conoides illius ad Conoides hujus, ut $\frac{2}{4}$ ad $\frac{3}{5}$, vel ut 5 ad 6. Paraboloides cubicale ad Biquadraticale, ut $\frac{3}{4}$ ad $\frac{4}{5}$, vel ut 15 ad 16: Et Conoides illius ad conoides hujus, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{4}{6}$ vel ut 9, ad 10. Et sic in aliis.

Intellige, si easdem vel æquales habeant & bases & altitudines (aut saltem reciprocatas:) Nam si diversas habeant vel bases vel altitudines vel utraque, ratio seriei unius ad aliam, componitur ex rationibus & basium & altitudinum & ea quæ est serierum propria. Puta si Parabolæ basis B altitudo A, Trianguli basis γ altitudo α; erit parabola illa ad Triangulum, ut $\frac{2}{3}$ AB ad $\frac{1}{2}\,\alpha\gamma$, vel 4 AB ad $3\,\alpha\gamma$ & pariter in cæteris. Item, si Trianguli basis B, altitudo A; & Parabolæ basis β, altitudo α, erit Parabola ad Triangulum ut $\frac{2}{3}\,\alpha\beta$ ad $\frac{1}{2}$ AB, vel $4\,\alpha\beta$ ad 3 AB.



Demonstratio patet. Cum enim Parabola AB sit $\frac{2}{3}$ Parallelogrammi AB; & Triangulum $\alpha\gamma$. $\frac{1}{2}$ Parallelogrammi $\alpha\gamma$ erit illa ad hoc ut $\frac{2}{3}$ AB ad $\frac{1}{2}\,\alpha\gamma$. Et similiter aliis,

PROP.

PROP. LXVI. *Theorema.*

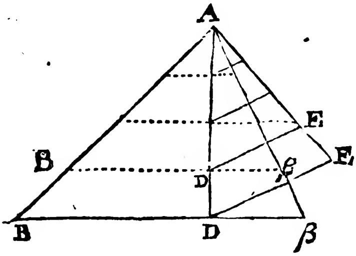
EX cognita quantitate ſeriei alicujus integræ, cognoſcitur quantitas ejuſdem obtruncatæ.

Puta, Si A B Triangulum ſit $\frac{1}{2}$ A B Parrallelogrammi; & $\alpha\beta$ Triangulum, $\frac{1}{2}$ $\alpha\beta$ Parallelogrammi: erit reſiduum Trapezium, $\frac{1}{2}$ A B $-$ $\frac{1}{2}$ $\alpha\beta$. Item A B Parabola $\frac{2}{3}$ A B parallelogrammi circumſcripti; & $\alpha\beta$ parabola $\frac{2}{3}$ $\alpha\beta$ parallelogrammi circumſcripti: erit reſiduum, $\frac{2}{3}$ A B $-$ $\frac{2}{3}$ $\alpha\beta$. Et pariter in aliis.

Fig. Preced.

PROP. LXVII. *Corollarium.*

SI Triangulum rectis quotlibet ſecetur baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè altas abſcindentibus;) abſciſſa Triangula (verticem inter & rectas ſecantes) ſunt ut 1, 4, 9, 16, &c. numeri quadrati. Spacia vero rectis illis interjecta, ut 1, 3, 5, 7, &c. Arithmetice-proportionales.

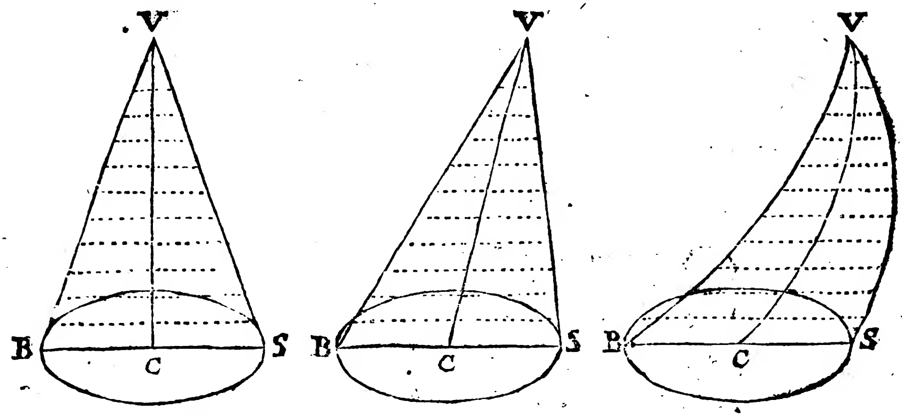


Quia Triangulorum abſciſſorum tam altitudines quam baſes ſunt arithmetice proportionales: ergo plana in duplicata ratione Arithmetice proportionalium, ſive ut numeri quadrati, 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, ſpacia interjecta, 1, 3 $=$ 4 $-$ 1, 5 $=$ 9 $-$ 4, 7 $=$ 16 $-$ 9 &c.

PROP. LXVIII. *Corollarium.*

SI conus planis quotlibet ſecetur baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè-altas abſcin-

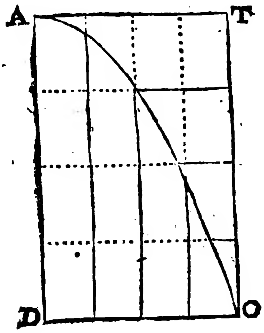
abscindentibus,) abscissi coni (verticem inter & plana secantia) sunt ut 1, 8, 27, 64, *&c. numeri cubici. Portiones vero interjectæ, ut* 1, 7, 19, 37, *&c. differentiæ numerorum cubicorum. (& similiter in Pyramide.)*



Quia cum conorum abscissorum altitudines sint arithmeticè proportionales & propterea etiam basium diametri; adeoq; bases in earundem ratione duplicata; erit ratio conorum (quæ ex altitudinum & basium rationibus componitur) in ratione altitudinum triplicata, seu ut 1, 8, 27, 64, &c. Et propterea portiones interjectæ, ut 1, 7 = 8 − 1, 19 = 27 − 8, 37 = 64 − 27. &c.

PROP. LXIX. *Corollarium.*

SI Parabola rectis quotlibet secetur (basi parallelis & æqualiter ab invicem remotis, portiones æquè-altas abscindentibus,) erunt abscissæ parabolæ (verticem inter & rectas secantes,) ut $1\sqrt{1}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{4}$, *&c. vel ut* $\sqrt{1}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{64}$, *&c. radices qua-*

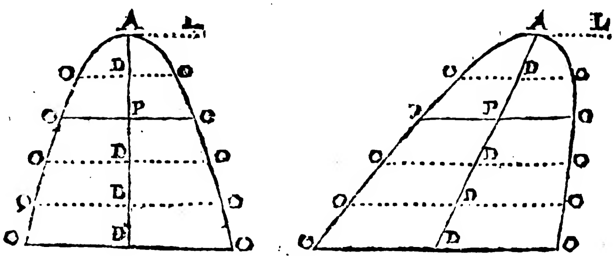


quadratica numerorum cubicorum. Spacia vero interjecta, ut earum radicum differentia.

Sunt enim bases (quippe Ordinatim-applicatæ in parabolâ) in altitudinum ratione subduplicata.

PROP. LXX. *Corollarium.*

SI Conoides Parabolicum planis quotlibet secetur (basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abscindentibus æquè-altas,) erunt conoidea sic abscissa (verticem inter & plana secantia) ut 1, 4, 9, 16, &c. numeri quadrati: Et portiones interjectæ, ut 1, 3, 5, 7, &c. Arithmetice-proportionales. (Et similiter in Pyramidoide.)

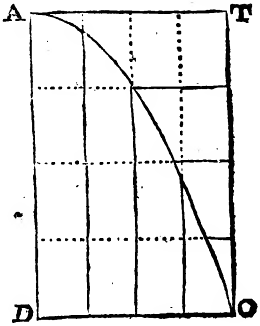


Nempe, ut de Triangulo dictum est Prop. 67. sunt enim conoidum abscissorum bases in ratione duplicata semidiametrorum hoc est ordinatim-applicatarum in parabola; & propterea, altitudinibus proportionales.

PROP.

PROP. LXXI. *Corollarium.*

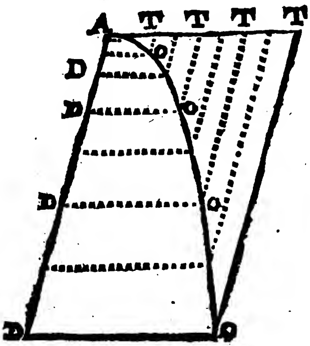
SI complementum semiparabolæ rectis quotlibet secetur (complementi basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abscindentibus æquè-altas,) erunt complementa sic abscissa (verticem inter & rectas secantes,) ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubici: Et portiones interjectæ, ut 1, 7, 19, 37, &c. numerorum cubicorum differentiæ.



Nempe ut supra de Cono dictum est, Prop. 68. sunt enim bases, hoc est, complementorum ordinatim applicatæ, in altitudinum ratione duplicatâ.

PROP. LXXII. *Corollarium.*

SI Conoides etiam *semiparabolæ complemento aptatum, planis quotlibet secetur (basi parallelis, & ab invicem æqualiter remotis, portiones abscindentibus æquè-altas,) erunt abscissa conoidea (verticem inter & plana secantia) ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri surdesolidi: Et portiones interjectæ, ut 1, 31, 211, 781, &c. numerorum surdesolidorum differentiæ. (Et similiter in Pyramidoide.)*



Sunt enim bases conoidum abscissorum, in duplicata ratione semidiametrorū suarum, ideoque in quadruplicata ratione altitudinum, (sunt enim ipsæ semidiametri basiū, seu ordinatim-applicatæ in semiparabolæ complemento, in duplicata ratione altitudinum.) Et propterea figuræ solidæ abscissæ, in altitudinum ratione quintuplicata; quippe quæ componitur ex rationibus basium & altitudinum.

SCHOLIUM.

Et similiter de aliis ejusmodi figuris (sive planis sive solidis) eo modis sectis, judicandum erit: respectu semper habito ad gradum seu potestatem illius seriei quo pertinent.

PROP. LXXIII. *Theorema.*

SI duæ quælibet series (aut etiam plures) invicem respective-multiplicentur (nempe primus terminus unius in primum alterius, secundus in secundum, &c.) prodibit ejusmodi alia series; quæ indicem habebit ex multiplicatarum indicibus aggregatum; rationem autem, ad seriem terminorum ipsius maximo æqualium, eam quam Tabellæ præcedentes (vel etiam Propositio 64) indicabunt.

Exempli gratia. Si series quadratorum vel secundanorum (cujus index 2) respective muciplicetur in seriem cuborum vel Tertianorum (cujus index 3,) prodibit series Quintanorum (cujus index $5 = 2 + 3$:) quæ propterea rationem habebit, ad seriem maximo Æqualium, eam quam habet 1 ad $6 = 5 + 1$.

Puta si respective multiplicetur

Series secundanorum	$0a$,	$1a$,	$4a$,	$9a$,	$16a$,	&c.
in seriem Tertianorum	$0b$,	$1b$,	$8b$,	$27b$,	$64b$,	&c.
prodibit series quint.	$0ab$,	$1ab$,	$32ab$,	$243ab$,	$1024ab$,	&c.

Item, si series secundanorum (cujus index 2) respective multiplicetur in seriem subtertianorum (cujus index $\frac{1}{3}$) erit producta series, Radices-cubicæ septimanorum (cujus index

est

est $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$;) quæ est ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad $\frac{10}{3} = \frac{7}{3} + 1$, vel ut 3 ad 10. Puta si respective multiplicetur

Series $0a$, $1a$, $4a$, $9a$, &c.
in seriem $\sqrt[3]{0b}$, $\sqrt[3]{1b}$, $\sqrt[3]{2b}$, $\sqrt[3]{3b}$, &c.

hoc est series $\sqrt[3]{0a^3}$, $\sqrt[3]{1a^3}$, $\sqrt[3]{64a^3}$, $\sqrt[3]{729a^3}$, &c.
in seriem $\sqrt[3]{0b}$, $\sqrt[3]{1b}$, $\sqrt[3]{2b}$, $\sqrt[3]{3b}$, &c.
prodibit series
$\sqrt[3]{0a^3b}$, $\sqrt[3]{1a^3b}$, $\sqrt[3]{128a^3b}$, $\sqrt[3]{2187a^3b}$, &c.

Item, si series subsecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) respective multiplicetur in seriem subquintanorum (cujus index $\frac{1}{5}$,) erit producta series Radices-Decimanæ septimanorum, (cujus index $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$)& propterea rationem habebit, ad seriem maximæ æqualium, eam quam habet 1 ad $\frac{17}{10} = \frac{7}{10} + 1$, vel 10 ad 17. Puta si respective multiplicetur.

Series $\sqrt[2]{0a}$, $\sqrt[2]{1a}$, $\sqrt[2]{2a}$, $\sqrt[2]{3a}$, &c.
in seriem $\sqrt[5]{0b}$, $\sqrt[5]{1b}$, $\sqrt[5]{2b}$, $\sqrt[5]{3b}$, &c.
hoc est, series
$\sqrt[10]{0a^5}$, $\sqrt[10]{1a^5}$, $\sqrt[10]{32a^5}$, $\sqrt[10]{243a^5}$, &c.
in seriem $\sqrt[10]{0b^2}$, $\sqrt[10]{1b^2}$, $\sqrt[10]{4b^2}$, $\sqrt[10]{9b^2}$, &c.
prodibit series
$\sqrt[10]{0a^5b^2}$, $\sqrt[10]{1a^5b^2}$, $\sqrt[10]{128a^5b^2}$, $\sqrt[10]{2187a^5b^2}$, &c.

Et similiter in aliis ejusmodi multiplicationibus continget.

PROP. LXXIV. *Corollarium.*

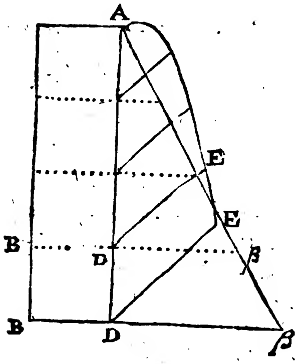
IDeoq; *Ubi Aggregatum Indicum serierum invicem respective- multiplicatarum idem est, ibi et idem erit Index seriei productæ.*

Exempli gratia. Si series tertianorum in seriem Tertianorum, vel series secundanorum in seriem Quartanorum, vel series Primanorum in seriem Quintanorum, vel series Æqualium in seriem sextanorum, respective multiplicetur; Prodibit series sextanorum. Quia nempe in singulis

aggregatum indicum est 6, (nam $3+3=2+4=1+5=0+6=6$.) Et similiter in aliis.

PROP. LXXV. *Corollarium.*

SI ADB Parallelogrammi rectæ omnes DB, in Dβ rectas Trianguli ADβ, (æque-alti) respective ducantur; rectangula producta erunt series primanorum (qualia sunt plana cunei Parabolici, prop. 11. Con. Sect.) pro quibus si substituantur totidem Quadrata (vel quævis aliæ figuræ planæ similes) illis æqualia, constituetur Pyramidoides Parabolicum: Et eorum Quadratorum (vel figurarum similium) latera, vel mediæ proportionales inter rectas sic multiplicatas, DE, constituent Parabolam, vel Semiparabolam.



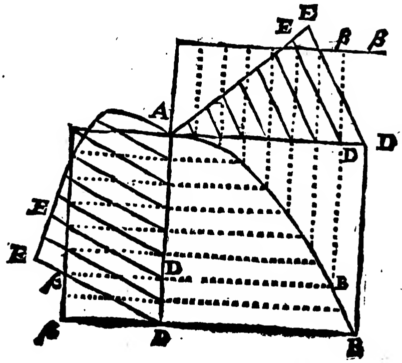
(Intellige, si plana illa, vel mediæ proportionales, quæ sic emergunt, supponantur ad rectam aliquam ita ordinatim-posita ut figurarum constituendarum natura postulat. Quod & deinceps aliquoties intelligendum erit.)

Nam, cum rectæ Parallelogrammi, sint series Æqualium (cujus index 0;) & rectæ Trianguli, series primanorum, (cujus index 1;) producetur, multiplicando, series item primanorum (quia $0+1=1$,) qualia sunt plana cunei Parabolici, & Pyramidoidis Parabolici, (per Prop. 9, 11. Con. Sect.) & mediæ proportionales (seu latera similium planorum) erunt series subsecundanorum (quippe ut Radices quadraticæ Primanorum) quales sunt parabolarum rectæ per Prop. 8. Con. Sect.

PROP.

PROP. LXXVI. *Coroll.*

SI ADβ Parallelogrammi rectæ βD in rectas DB semiparabolæ æquè-altæ ADB respectivè ducantur, rectangula producta erunt series subsecundanorum; & mediæ proportionales, series subquartanorum (quales sunt rectæ Paraboloidis Biquadratici DE.)



Hoc est, series Æqualium (cujus index 0) in seriem subsecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) respectivè ducta efficiet seriem item subsecundanorum (quia $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$) & mediæ proportionales (quippe subsecundanorum radices quadraticæ) erunt series subquartanorum.

PROP. LXXVII. *Coroll.*

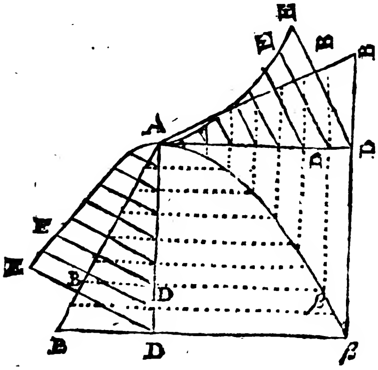
SI ADβ Parallelogrammi rectæ Dβ in rectas DB Complementi Semiparabolæ respectivè ducantur; rectangula producta erunt series secundanorum: mediæ autem proportionales, series primanorum (Triangulum constituentium, ADE.)

Nempe, series Æqualium in seriem secundanorum sic ducta, dat seriem etiam secundanorum (quia $0 + 2 = 2$) eorumque radices quadraticæ sunt series primanorum.

PROP.

PROP. LXXVIII. *Corollarium.*

SI Trianguli rectæ DB respectivè ducantur in rectas semiparabolæ Dβ, rectangula producta erunt series radicum quadraticarum Tertianorum, & mediæ proportionales, radices Biquadraticæ Tertianorum, DE.



Nempe, series primanorum in seriem subsecundanorum sic ducta, dabit seriem radicum quadraticarum Tertianorum (quia $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$) quarum radices quadraticæ, sunt radices biquadraticæ Tertianorum.

PROP. LXXIX. *Corollarium.*

SI Trianguli rectæ DB respective ducantur in rectas Complementi semiparabolæ Dβ; producta rectangula sunt series Tertianorum (quia $1 + 2 = 3$.) Et mediæ proportionales, radices quadraticæ Tertianorum. DE.

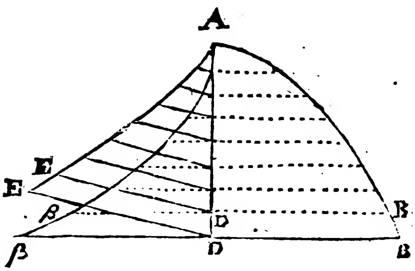
Demonstratur ut præcedentes.

PROP. LXXX. *Corollarium.*

SI rectæ complementi semiparabolæ in rectas semiparabolæ respective ducantur; rectangula producta erunt series radicum quadraticarum Quintanorum (quia

2 +

$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$;) *& mediæ proportionales, series radicum*



biquadraticarum Quintanorum. Ut patet.

SCHOLIUM.

Et pari modo de figuris sive planis sive solidis, quæ ex ejusmodi multiplicatione provenient, judicandum erit. Ut si trianguli unius rectæ in rectas Trianguli alterius (sive similis sive dissimilis, modo æque-alti) respective ducantur, fiet Pyramis; mediæ vero proportionales constituent etiam Triangulum. Semiparabolæ unius rectæ in rectas alterius respective ductæ, efficient Pyramidoides Parabolicum; mediæ autem proportionales semiparabolam. Et sic de cæteris.

PROP. LXXXI. *Theorema.*

Si unius Seriei termini omnes per terminos alterius Seriei respectivè dividantur, quotientes erunt series alia, cujus index reperitur subducendo indicem seriei Dividentis ex indice seriei divisæ, quod restat enim est index seriei divisione provenientis, sive Quotientis: Ratio autem quam habitura est series sic producta, ad seriem totidem terminorum ipsius maximo æqualium, ea erit quam Tabellæ præcedentes (vel propositio 64) indicant.

Exempli gratia. Si series Biquadratorum vel quartanorum

norum (cujus index 4) dividatur per seriem cuborum vel Tertianorum (cujus index 3) Quotientes erunt series lateralium seu Primanorum, cujus index $1 = 4 - 3$.

Tert.	Quart.	Prim.
0c)	0qq	(0l
1c)	1qq	(1l
8c)	16qq	(2l
27c)	81qq	(3l
&c.	&c.	&c.

Si series tertianorũ dividatur per seriem Primanorum proveniet series secundanorum, cujus index $2 = 3 - 1$. Et si series secundanorum per seriem secundaries dividatur, proveniet series æqualium, cujus index $0 = 2 - 2$. Et sic de cæteris.

Prim.)	Tert.	(Secund
0l)	0c	(0q
1l)	1c	(1q
2l)	8c	(4q
3l)	27c	(9q
	&c.	

Demonstratio patet ex Prop. 73. Quia nempe series Tertianorum in seriem primanorum respective ducta efficiet seriem Quartanorum. Et series primanorum in seriem secundanorum sic ducta efficiet seriem tertianorum. Et series secundanorum in seriem Æqualium sic ducta, producet seriem secundanorum. Et sic in reliquis omnibus. quod enim multiplicatione conficitur, id Diuisione resolvitur.

Sec.	Sec.	Æqual.
0q)	0q	(1
1q)	1q	(1
4q)	4q	(1
9q)	9q	(1
	&c.	

PROP. LXXXII. *Corollarium.*

Ideoq; , *ubi idem est graduum sive indicum excessus seriei Dividendæ supra seriem Dividentis, idem erit seriei Quotientum index.*

Exsempli gratia. Si series sextanorum per seriem quartanorum, vel series Quintanorum per seriem Tertianorum, vel series Quartanorum per seriem Secundanorum, vel series Tertianorum, per seriem Primanorum dividatur; proveniet series Secundanorum. Quia nempe in singulis series Divisa seriem Dividentem duobus gradibus superat; (est enim $6 - 4 = 5 - 3 = 4 - 2 = 3 - 1 = 2 - 0 = 2$) Ideoque per præced.) idem seriei provenientis Index. Et pariter in aliis.

PROP.

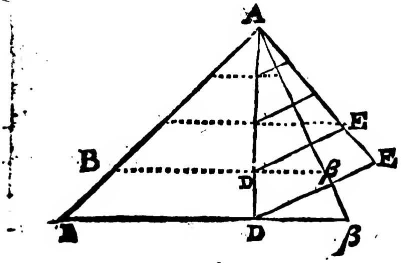
PROP. LXXXIII. *Coroll.*

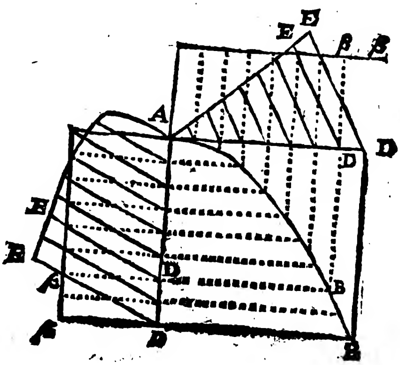
SI Pyramis (series nempe Secundanorum) ad Triangulum (æquè-altum) respectivè applicetur (nempe plana illius ad Rectas hujus) prodibit Triangulum; (quia nempe $2 - 1 = 1$.) Si vero applicetur ad complementum semi-parabolæ, prodibit Parallelogrammum; (quia $2 - 2 = 0$.) Si ad semiparabolam, planum prodiens erit series Radicum quadraticarum Tertianorum; (quia $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.) Si ad seriem Æqualium, prodibit complementum semiparabolæ; (quia $2 - 0 = 2$.) Et sic in aliis.

Patet ex Prop. 81.

PROP. LXXXIV. *Coroll.*

VEL, si respectivis rectis Trianguli primi ADB & secundi ADE, sumantur tertiæ proportionales; prodibit Triangulum tertium ADβ: Si respectivis rectis complementi semiparabolæ ADB, & Trianguli





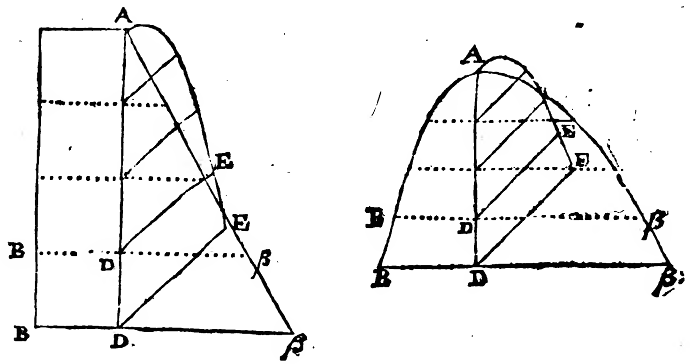
ADE, prodibit parallelogrammum ADβ: Si vero Parallelo-

rallelogrammi ADβ & Trianguli ADE, prodibit complementum semiparabolæ ADB.

Sequitur ex præcedente. Quadrata enim rectarum in Triangulo constituunt Pyramidem. Et similiter in reliquis. Ostenditur autem pars prima in figura priori; secunda & tertia in posteriori.

PROP. LXXXV. *Corollarium.*

S*I Pyramidoides Parabolicum (series nempe Primanorum) ad Triangulum (æquè-altum) respectivè applicetur: prodibit Parallelogrammum; (quia* $1 - 1 = 0$.) *Si ad parallelogrammum, prodibit Trian-*



gulum; (quia $1 - 0 = 1$.) *Si ad semiparabolam, prodibit semiparabola; (quia* $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.) *Si ad semi-paraboloides cubicale, planum prodiens constabit ex secundanorum radicibus cubicis; (quia* $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.) *Et pariter in aliis ejusmodi applicationibus.*

Patet ex Prop. 81.

PROP.

PROP. LXXXVI. *Corollarium.*

SImiliter. *Si respectivis rectis Trianguli ADβ, & semiparabolæ ADE, sumantur tertiæ proportionales, prodibit Parallelogrammum ADB: si respectivis rectis Parallelogrammi ADB, & semiparabolæ ADE, prodibit Triangulum ADβ: si respectivis rectis semiparabolæ primæ ADB, & secundæ ADE, prodibit semiparabola tertia ADβ: & sic in aliis.*

Sequitur ex præcedente. quadrata enim rectarum in semiparabola, constituent Pyramidoides Parabolicum. Ostenditur, in fig. præced.

SCHOLIUM.

Et pari modo de aliis figurarum solidarum ad Planas applicationibus respectivis judicium fiet. Sufficit paucas exsempli causa indicasse, ad quarum imitationem fieri possunt innumeræ aliæ.

PROP. LXXXVII. *Theorema.*

SI proponatur series quælibet prædictarum per aliam superioris gradus seu potestatis dividenda, nulla jam memoratarum series prodire poterit, (cum index potestatis superioris ex indice potestatis inferioris, major quippe ex minore, auferri non possit:) sed aliusmodi plane series, cujus nempe termini sunt reciprocè proportionales homologis terminis alterius seriei, quæ indicem habet æqualem excessui indicis seriei dividentis supra indicem seriei divisæ.

Series autem sic provenientes, series *Reciprocæ* appellentur, habeantq; Indices negativos.

Exsempli gratia. Si series Secundanorum dividenda sit per seriem Tertianorum, vel series Primanorum, per seriem secundanorum, vel series Æqualium per seriem Primanorum, (ubi seri-

es dividens est uno gradu superior serie dividenda, adeoque index seriei dividentis unitate major quam index seriei divisæ, puta $3-2=2-1=1-0=1$:) termini seriei oriundæ erunt reciproce-proportionales homologis terminis seriei primanorum Puta si respective dividatur

series	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
per seriem	$0a^3$,	$1a^3$,	$8a^3$,	$27a^3$,	$64a^3$,	&c.
vel series	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.
per seriem	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
vel series	1,	1,	1,	1,	1,	&c.
per seriem	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.

prodibit series $\frac{1}{0a}$, $\frac{1}{1a}$, $\frac{1}{2a}$, $\frac{1}{3a}$, $\frac{1}{4a}$, &c.

cujus seriei termini sunt reciproce proportionales homologis terminis seriei primanorum $\frac{0a}{1}$, $\frac{1a}{1}$, $\frac{2a}{1}$, $\frac{3a}{1}$, $\frac{4a}{1}$, &c. ut patet. Nempe $\frac{1}{2a}.\ \frac{1}{3a}.\ ::\ \frac{3a}{1}.\ \frac{2a}{1}.$ Et sic ubique.

Eodem modo si series primanorum dividenda sit per seriem tertianorum; vel (quod tantundem valet) series Æqualium per seriem Secundanorum; erit series proveniens seriei secundanorum reciproce proportionalis. puta

$\frac{1}{0a}$, $\frac{1}{1a}$, $\frac{1}{4a}$, $\frac{1}{9a}$, $\frac{1}{16a}$, &c.

Et pari modo in omnibus ejusmodi divisionibus continget.

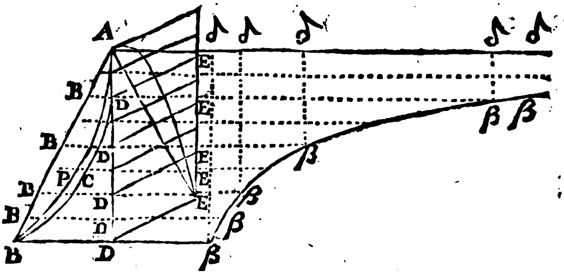
PROP. LXXXVIII. *Coroll.*

Si infinita plana (parallela) Parallelepipedi, ad totidem rectas Trianguli (æque-alti) applicentur; (vel si respectivis rectis Trianguli, & Parallelogrammi, sumantur tertiæ proportionales;) series rectarum provenientium erit reciproca seriei Primanorum, quæ quidem

rectæ

rectæ sunt suis a vertice distantiis (vel, si placet, diametris interceptis,) reciproce-proportionales.

Esto enim Parallelepipedum, cujus infinita plana æquentur quadratis totidem rectarum Parallelogrammi ADE, quæ si applicentur ad rectas Trianguli ADB, prodibunt rectæ (re-



ctis trianguli & Parallelogrammi tertiæ proportionales) figuram ADβ mixtam constituentes, quæ reciproce proportionales erunt tam homologis rectis Trianguli (quia nempe cum illis constituunt rectangula æqualia) quam Diametris interceptis, seu distantiis a vertice, quæ (propter similia Triangula abscissa) sunt illis trianguli rectis proportionales.

PROP. LXXXIX. *Coroll.*

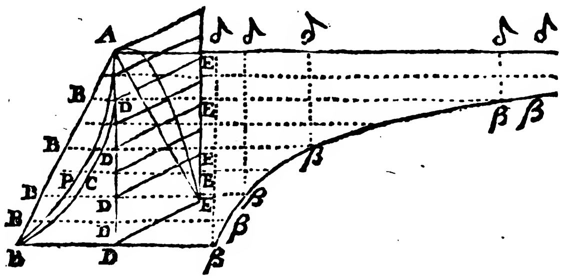
Idem continget, si Plana Pyramidis (quadratis rectarum Trianguli ADE æqualia) applicentur ad totidem Rectas Complementi Semiparaboloidis Cubicalis ADEC.

Patet ex Prop. 87. Nam (ut in Prop. præced.) series primanorum ex quibus conflatur Triangulum, est uno gradu superior, quam series Æqualium, ex quibus constat Parallelepipedum: Sic (in hac Prop) series Tertianorum in complemento semiparaboloidis cubicalis est in uno gradu superior quam series secundanorum ex quibus constat Pyramis. Utrobique igitur provenit series seriei Primanorum reciproca.

PROP.

PROP. XC. *Corollarium.*

Idem continget, si Plana Pyramidoidis Parabolici (hoc est, series Primanorum,) æqualia quadratis rectarum semiparabolæ ADE respective applicentur ad rectas complementi semiparabolæ ADBP. (Seriem nempe Secundanorum.)



Nam & hic index seriei dividentis unitate superat indicem seriei dividendæ.

PROP. XCI. *Corollarium.*

Figura plana ex seriè rectarum Primanis reciproce proportionalium conflanda, est interminabilis. Quod & similiter verum est de omnibus seriebus Reciprocis.

Cum enim primus terminus in serie Primanorum sit o, primus terminus in serie reciproca erit ∞ vel infinitus: (sicut, in divisione, si diviso sit o, quotiens erit infinitus.) adeoq; recta A δ, & curva ββ, non nisi post infinitam distantiam (hoc est, nunquam,) concurrent.

Pari ratione neque concurrent (nisi post infinitam distantiam) eadem curva ββ & recta AD (quantumvis utraq; continuetur) non prius enim evanescet distantia Dβ quam facta fuerit infinita recta DB & propterea -----

PROP.

PROP. XCII. *Corollarium.*

Curva ββ duas habet Asymptotas rectas Aδ, AD. Quod & de aliis ejusmodi Curvis rectarum, series reciprocas terminantibus, verum est.

Nempe ita perpetuo propius accedunt ad curvam rectæ, ut tandem earum distantia sit quavis assignabili minor, (ut ex dictis facile est probatu,) neque tamen unquam concurrent, ut jam ostensum est. Atque idem de aliis ejusmodi curvis pariter ostendi poterit.

PROP. XCIII. *Corollarium.*

Rectæ (Dβ, Dβ, &c.) Primanis reciprocè proportionales ab infinitâ ($A\delta = \infty$) continue decrescunt, (eadem ratione qua respective rectæ DB, DB, in serie primanorum a puncto $A = 0$ continue crescunt,) donec pervenitur ad minimam, (sicut in serie primanorum pervenitur ad maximam.) Quod verum est & in aliis seriebus reciprocis.

Patet, propter proportionem reciprocam.

PROP. XCIV. *Corollarium.*

In Figura ADββ, (ex primanorum reciprocis) Parallelogramma inscripta ADβ, ADβ, &c. sunt invicem æqualia.

Habent enim bases & altitudines reciprocas per Prop. 88.

PROP. XCV. *Corollarium.*

Et propterea, *Ipsa curva ββ est Hyperbola; cujus centrum A, Asymptotæ A D, Aδ.*

Per Prop. 12. lib. 2. Apollonii.

PROP. XCVI. *Corollarium.*

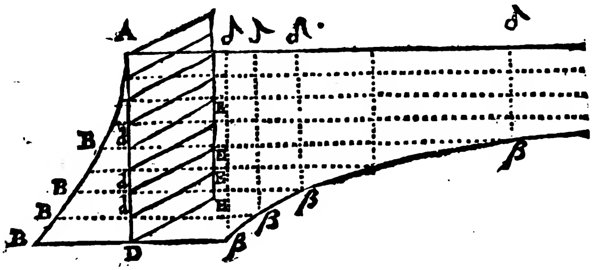
SI chorda musica AD varie dividatur in punctis D D, &c. sonos edet proportionales rectis D β, D β, &c.

In Fig. præced.

Nam (per principia musica) eadem chorda (æquabilis & æqualiter tensa) sonos edit longitudinibus reciproce proportionales. Ideoque si chordæ sint ut A D, A D, &c. soni erunt ut D β, D β, &c. per Prop. 88.

PROP. XCVII. *Coroll.*

SI plana Parallelepipedi (quippe series æqualium) æqualia quadratis rectarum Parallelogrammi ADE ad respectivas rectas Complementi Semiparabolæ ADB (seriem scil. secundanorum) applicentur; prodibit series rectarum secundanis reciprocè proportionalium: Ex quibus si supponatur conflari figura plana ADβ, erit ea interminabilis; & curva illas terminans duas habebit Asymptotas rectas AD, Aδ.



Probatur eodem modo quo propositiones aliquot præcedentes de serie reciproca seriei Primanorum.

PROP. XCVIII. *Coroll.*

IDem continget, si plana pyramidis sic applicentur ad rectas complementi semi-paraboloidis Biquadraticalis;

vel

vel plana pyramidoidis parabolici ad rectas complementi paraboloidis cubicalis.

Nam & istic index seriei dividentis binario superat indicem seriei dividendæ.

PROP. XCIX. *Corollarium.*

IN *ejusmodi serie secundanis reciprocâ, rectæ* $D\beta$, $d\beta$, *&c. sunt in reciprocæ rationis Diametrorum (vel distantiarum a vertice) ratione duplicata, (sive ut dAq DAq, &c.)*

Quia nempe reciproce-proportionales sunt rectis D B, d B, &c. quæ sunt in diametrorum A D, A d &c. rationis directæ ratione duplicata. Puta

$$dAq . DAq :: dB . DB :: D\beta . d\beta. \text{ Ergo } \frac{dAq}{DAq} = \frac{D\beta}{d\beta}.$$

PROP. C. *Corollarium.*

IN *Figura plana* ($AD\beta\beta$) *ex serie rectarum secundanis reciprocarum conflata, inscripta parallelogramma* ($AD\beta$, $Ad\beta$,) *sunt interceptis diametris* (DA, dA,) *reciproce proportionalia.*

Sunt enim (per 23. e 6) ut $DA \times D\beta$ ad $dA \times d\beta$. Est autē per præced.) $d\beta = \frac{DAq}{dAq} D\beta$: Et $dA \times d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$.

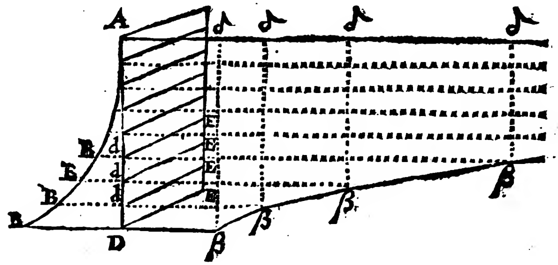
$$\text{Ergo } \& \; DA \times D\beta . dA \times d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta :: dA \times DA \times D\beta .$$

$$DAq \times D\beta :: dA . DA.$$

PROP. CI. *Corollarium.*

SI *verò figura plana* ($AD\beta\beta$) *sit ex serie rectarum Tertianis reciprocarum conflata; (quæ nempe sint rectis complementi paraboloidis cubicalis ADB, & Parallelo-*

grammi ADE, tertiæ proportionales;) erunt rectæ illæ (Dβ, dβ, &c.) in reciprocæ rationis Diametrorum (DA, dA, &c.) ratione triplicata (scil. ut dAc, DAc, &c.) Et Parallelogramma inscripta ADβ, Adβ, &c.) in reciprocæ rationis diametrorum ratione duplicatâ. (sive ut dAq, DAq, &c.)



Est enim (ex constructione) $D\beta . d\beta :: dB . DB :: dAc . DAc$. Et propterea etiam $d\beta = \frac{DAc}{dAc} D\beta$. Ergo Parallelogramma $AD\beta . Ad\beta :: DA \times D\beta . dA \times d\beta = \frac{dA \times DAc}{dAc} D\beta = \frac{DAc}{dAq} D\beta :: dAq \times DA \times D\beta . DAc \times D\beta :: dAq . DAq$. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo de aliis ejusmodi figuris planis ex qualibet rectarum *serie reciproca* conflatis judicandum erit; ut & de Parallelogrammis (sive rectangulis sive obliquangulis, prout situs figuræ postulat,) ipsis inscriptis.

Quod ad Aream autem attinet istarum figurarum ex seriebus reciprocis constantium; quærenda est illa eodem fere modo quo supra in seriebus directis. Ubi autem series directæ indices habent 1, 2, 3, &c. ut quæ supra seriem Æqualium tot gradibus ascendunt; habebunt hæ quidem (illis reciprocæ) suos indices contrarios negativos -1, -2, -3, &c. tanquam tot gradibus infra seriem Æqualium descendentes. Prout autem illæ ab 0 ciphra vel Nihilo continuo crescunt, hæ contra ab ∞ Infinito continue decrescunt; atque ut illic terminus maxi-

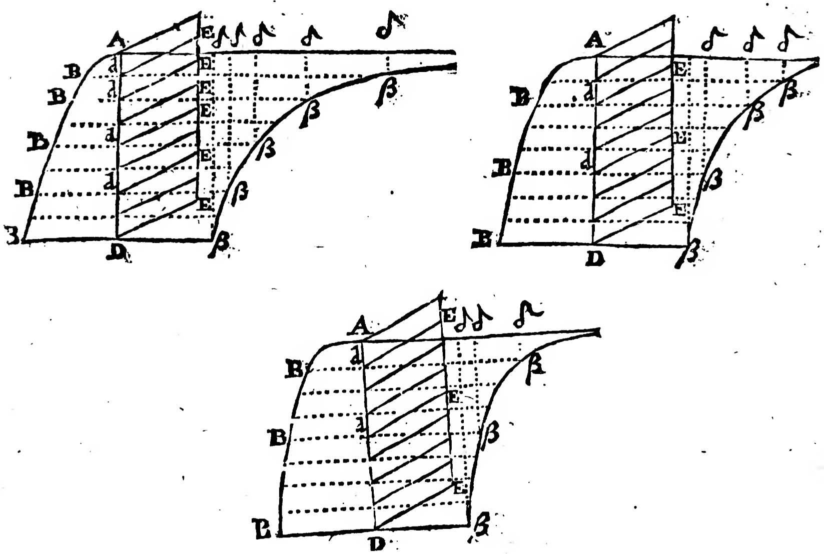
mus

mus, hic minimus, seriem claudit: (quæ tamen & pro arbitrio continuanda supponitur, quousque libet ille crescendo, hic decrescendo.) Adeoque, ut illic figura Circumscripta (parallelogrammum puta vel prisma) sive series totidem terminorum Maximo æqualium; hic, figura Inscripta, sive series totidem terminorum Minimo æqualium, habenda est pro communi mensura ad quam facienda est comparatio; utrobique ad illum terminum respectu habito qui seriem claudit.

Neque interim mirum cuiquam videatur (ut ut fortassis inexspectatum) si figuræ interminatæ rationem ad datam aliam terminatam inquiram. Quamvis enim hujusmodi figuræ ADβ (ut ut ex parte Dβ ad libitum terminatæ, uti modo in his scholiis dictum est) supponantur ex parte $\delta\beta$ in infinitum continuatæ (per Prop. 91.) non tamen propterea vel nullam vel semper infinitam rationem habituræ sunt ad datam figuram terminatam, puta ad parallelogrammūm æque altum super eadem basi Dβ descriptum Quod eo quidem facilius assensum obtinere posse videatur, cū id ipsum in una quadā figura solida (quam *Hyperbolicam acutam infinitam* vocat) jam ostenderit Torricellius. Sed neque semper rationem habituræ sunt finitam, sed aliquando vel infinitam, vel etiam (si id sine solœcismo dici possit) majorem quam infinitam. Nempe, si eadem ratione abbreviantur rectæ $\delta\beta$, qua prolongantur recte Dβ, erit ea ratio infinita; ubi nempe prolongatio unius æquipollet abbreviationi alterius, (& propterea figuræ infinitæ continuatæ ratio ex utraque composita æquipollet figuræ alicui æquabiliter in infinitum continuandæ:) Si vero minori ratione abbreviantur rectæ $\delta\beta$ quam prolongentur Dβ, futura est ratio plusquam infinita; tunc enim prolongatio harum præpollet (seu plusquam æquipollet) illarum abbreviationi: Si autem majori ratione decrescunt rectæ $\delta\beta$ quam crescunt rectæ Dβ, præpollet earum decrementum incremento harum; adeoq; futura est ratio finita, minor siquidem quam infinita. (Et quidem secundum hoc κειτήειον, non modo de figuris hisce quas jam tractamus, sed de aliis etiam quibusvis interminabilibus, sive planis sive solidis, ad terminatas aliquas comparatis, judicandum erit: quæ, credo, speculatio non videbitur injucunda.) Quæ autem futura est in singulis ratio, sequentibus aliquot propositionibus (regulam Prop. 64 secuti) indicabimus.

PROP. CII. *Theorema.*

SI figura $AD\beta$ verticem habeat $A\alpha$ infinitum, & perpetuò decreſcat ad baſin uſq; $D\beta$, ſecundum ſeriem aliquam reciprocam ſeriei cuilibet directæ (earum puta quæ prop. 59. memorantur,) quæ indicem habeat minorem quam 1; habebit illa ad parallelogrammum ſuper eâdem baſi æque-altum rationem finitam; eam nempe quam habet 1 ad iſtius ſeriei reciprocæ indicem unitate auctum.



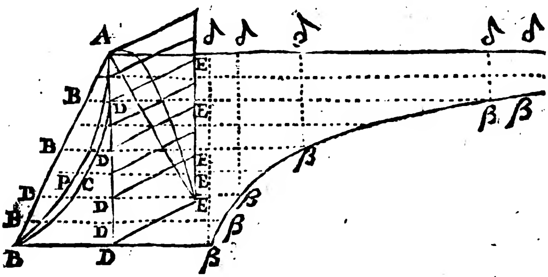
Exempli gratia; ſunto ſeries directæ ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. quarum indices $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. (unitate minores;) ſeries his reciprocæ indices habebunt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (Nam ſi ſupponatur ſeries æqualium, cujus index 0, per illas dividi, ſeries

divisione provenientes habebunt indices $0-\frac{1}{2}$, $0-\frac{1}{3}$, $0-\frac{1}{4}$, &c. hoc est $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (per Prop. 81.) quibus si (juxta regulam Prop. 64.) addatur 1, fient $-\frac{1}{2}+1$, $-\frac{1}{3}+1$, $-\frac{1}{4}+1$, &c. hoc est, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. & propterea ratio totius figuræ ad parallelogrammum inscriptum (super eadem base æquealtum) ut 1 ad $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. vel ut 2 ad 1, 3 ad 2, 4 ad 3, &c.

Et pari modo, si sumatur series reciproca seriei radicum cubicarum secundanorum, vel radicum biquadraticarum secundanorum, aut tertianorum, vel radicum surdesolidarum secundanorum, tertianorum, aut quartanorum, (quarum indices sunt $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$,) aut alii cuivis seriei, cujus index est unitate minor. Quia reciprocarum serierum indices negativi his contrarii (puta $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, &c.) additione unitatis fient affirmativi, adeoque ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, erit ratio finita; quippe numeri positivi ad positivum.

PROP. CIII. *Theorema.*

SI vero ejusmodi Figura ADBβ sic continuo decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitati æqualem (nempe seriei Primanorum;) habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem infinitam: eam nempe quæ est 1 ad 0.

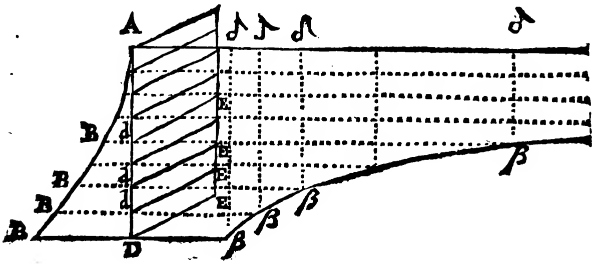


Cum enim series primanorum indicem habeat 1, series hinc reciproca indicem habebit -1, ideoque per

per Prop. 64.) ratio proveniens erit 1 ad − 1 + 1. hoc est 1 ad 0.

PROP. CIV. *Theorema.*

Si deniq; ejusmodi Figura $AD\beta\beta$, sic continuo decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitate majorem; habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem plusquam infinitam: qualem nempe habere supponatur numerus positivus ad numerum negativum, sive minorem nihilo. Nempe eam, quam habet 1 ad indicem unitate auctum.



* Puta cum indices seriei secundanorum, Tertianorum Quartanorum, &c. sint 2, 3, 4, &c. (unitate majores,) indices serierum illis reciprocarum erunt − 2, − 3, − 4, &c. qui quamvis unitate augeantur (juxta Prop. 64.) manebunt tamen negativi, puta $-2+1=-1$, $-3+1=-2$, $-4+1=-3$, &c. & propterea ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, puta 1 ad − 1, 1 ad − 2, 1 ad − 3, &c. major erit quam infinita, sive 1 ad 0; quia nempe rationum consequentes sunt minores quam 0.

Atque idem continget, si sumatur reciproca seriei radicum quadraticarum Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum &c. (cujus indices sunt $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c.) vel indicum cubicarum Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. (cujus indi-

ces

ces sunt $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, &c.) aut cuivis denique seriei cujus index est unitate major. Ut patet.

PROP. CV. *Theorema.*

SI ejusmodi figura ADββ verticem habens Aδ infinitum & basin Dβ determinatam, rationem habeat ad inscriptum parallelogrammum ADβδ majorem quam infinitam: eadem figura ADββ verticem habens AD infinitum & basin δβ determinatam, rationem habebit ad inscriptum Parallelogrammum AδβD minorem quam infinitam (finitam nempe:) Et contra, si situ illo considerata rationem habeat minorem quam infinitam; situ hoc habebit rationem majorem quam infinitam: Si deniq; in situ uno rationem habeat simpliciter infinitam (puta neq; majorem neq; minorem) etiam & situ altero habebit rationem simpliciter infinitam.

Nam verbi gratia, in serie secundanis reciproca, cum sint (per Prop. 99.) rectæ Dβ, Dβ, in diametrorum AD, AD, ratione reciprocæ duplicata; erunt e converso rectæ AD, AD, hoc est δβ, δβ, in rectarum Dβ, Dβ, hoc est, diametrorum Aδ, Aδ, ratione reciprocæ subduplicata; adeoque ipsæ δβ, δβ, &c. sunt series secundanis reciproca. Et contra. Atque (cum idem etiam in aliis ejusmodi seriebus contingat) patet propositum per Prop. 102, & 104.

In serie vero primanis reciproca; cum (per Prop. 88.) rectæ Dβ, Dβ, sint diametris AD, AD, reciproce proportionales; erunt etiam rectæ δβ, δβ diametris suis Aδ, Aδ, reciproce proportionales, ipsæque δβ, δβ, series item primanis reciproca. Constat ergo propositum per Prop. 103.

PROP. CVI. *Theorema.*

SI series aliqua reciproca per seriem aliam (sive reciprocam sive directam) multiplicetur aut dividatur

tur

tur, vel etiam aliam multiplicet aut dividat; eædem leges observandæ sunt quæ in seriebus directis prop. 73 & 81.

Exsempli gratia. Si series secundanis reciproca (puta $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, &c.) cujus index -2 respective multiplicetur in seriem Tertianis reciprocam (puta $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, &c.) cujus index est -3; prodibit series subquintanis reciproca $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{243}$, &c.) cujus index $-5 = -2 -3$ ut patet.

Item si series tertianis reciproca ($\frac{1}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, &c.) cujus index -3; respective multiplicetur per seriem secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit series $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{9}{27}$, &c. hoc est $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. Primanis reciproca, cujus index $-1 = -3 + 2$.

Item si series subsecundanis reciproca $\left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \&c.\right)$ cujus index $-\frac{1}{2}$; respective multiplicetur in seriem secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit series $\left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{3}}\right.$, &c. vel $\frac{1}{1}\sqrt{1}$, $\frac{4}{2}\sqrt{2}$, $\frac{9}{3}\sqrt{3}$, &c. vel $1\sqrt{1}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$, &c. vel $\sqrt{1}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$, &c.) radicum quadraticarum cuborũ seu tertianorum, cujus index $\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 2$.

Item, si series secundanis reciproca, cujus index -2, dividat seriem Primanis reciprocam, cujus index -1; prodibit series Primanorum, cujus index $1 = -1 + 2$, nempe -1 minus -2.

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = 1$
$\frac{1}{4}$)	$\frac{1}{2}$	($\frac{4}{2} = 2$
$\frac{1}{9}$)	$\frac{1}{3}$	($\frac{9}{3} = 3$
	&c.	

Item si series Primanis reciproca, cujus index -1, dividat seriem secundanis reciprocam, cujus index -2; prodibit series Primanis reciproca, cujus index $-1 = -2 + 1$; nempe -2 minus -1.

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$)	$\frac{1}{4}$	($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$)	$\frac{1}{9}$	($\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
	&c.	

Item, si series primanis reciproca, cujus index -1, dividat seriem secundanorum, cujus index 2; prodibit series tertianorum, cujus index $3 = 2 + 1$, nempe 2 minus -1.

$\frac{1}{1}$)	1	(1
$\frac{1}{2}$)	4	(8
$\frac{1}{3}$)	9	(27
	&c.	

Item

Item si seriem Primanis reciprocam, cujus index -1, dividat series secundanorum, cujus index 2; prodibit series Tertianis reciproca, cujus index $-3 = -1 - 2$, nempe -1 minus 2.

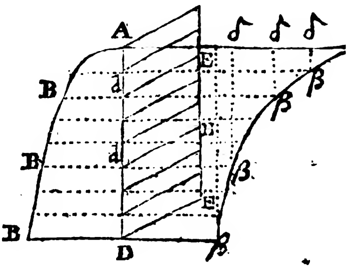
1)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1}$
4)	$\frac{1}{2}$	($\frac{1}{8}$
9)	$\frac{1}{3}$	($\frac{1}{27}$
	&c.	

Atque idem continget, in aliis quibusvis hujusmodi seriebus. Adeoque constat propositum.

PROP. CVII. *Corollarium.*

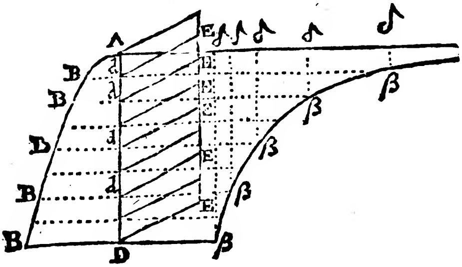
ET propterea; *Si ad hujusmodi figuram A D β α, (ex una parte in infinitum productam) juxta quamcunq; seriem reciprocam, aptetur (eo modo quo 9 Prop. Con: Sect. & alibi supra ostendi;) Pyramidoides vel Conoides inversum, (seu potius Calatoides:) habebit illud ad cylindrum aut Prisma inscriptum (super eadem basi æquè-altum) eam rationem, sive finitam sive infinitam sive plusquam infinitam, quam præcedentia Theoremata docebunt.*

☞ Puta, si planum sit rectarum series subtertianis reciproca, cujus index $-\frac{1}{3}$, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inscriptum (per Prop. 64, & 102) ut 1 ad $\frac{2}{3}$ ($= -\frac{1}{3} + 1$) hoc est, ut 3 ad 2: solidum ex totidem planis constans in rectarum earum ratione duplicata, erit series Quadratis subtertianorum reciproca, cujus index (per Prop. 106.) $-\frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, vel $-\frac{1}{3}$ plus $-\frac{1}{3}$, & ratio illius solidi ad inscriptum cylindrum vel Prisma (super eadem basi æque altum) ut 1 ad $\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1$, vel ut 3 ad 1 utrobique ratio finita. per Prop 64 & 102.



Si planum, sit series subsecundanis reciproca, cujus index $-\frac{1}{2}$, adeoque ratio ipsius ad Parallelogrammum inscriptum

ut 1 ad $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}+1$, vel ut 2 ad 1: (per Prop. 101, 102,) ſolidum ex totidem planis in rectarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries quadratis ſubſecundanorum reciproca, vel (quod tantundem valet) ſeries Primanis reciproca, cujus index $-\frac{2}{2}$, vel $-1 = -\frac{1}{2} -\frac{1}{2}$. Ideoque ratio hujus ſolidi ad cylindrum vel Priſma (ſuper eadem baſi æquealtum) ut 1 ad $-1+1=0$.



(per Prop 103.) Nempe illic ratio finita, hic ſimpliciter infinita.

Si planum ſit ſeries Quadratis ſubtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{2}{3}$, ejuſque ratio ad Parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}+1$, vel ut 3 ad 1. (per Prop. 102.) ſolidum ex planis totidem in rectarum illarum duplicata ratione conſtans, erit ſeries Biquadratis Subtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{4}{3} = -\frac{2}{3} -\frac{2}{3}$, & propterea ratio ipſius ad inſcriptum cylindrum vel Priſma ſuper eadem baſi æque-altum, ut 1 ad $-\frac{4}{3}+1 = -\frac{1}{3}$, vel ut 3 ad -1 (per Prop. 104.) Nempe illic ratio finita, hîc pluſquam infinita.

Si planum ſit ſeries primanis reciproca, cujus index -1, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inſcriptum 1 ad $-1+1=0$: (per Prop 103) Solidum ex planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries Quadratis Primanorum (hoc eſt, ſecundanis) reciproca, cujus index -2, & propterea ratio ipſius ad Cylindrum vel priſma ſuper eadem baſi æque altum, ut 1 ad $-2+1$, ſeu ut 1 ad -1. (per P. 104) Nēpe illic ratio ſimpliciter infinita, hic pluſquā infinita.

Si planum ſit ſeries ſecundanis reciproca, cujus index -2, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $-2+1=-1$. Solidum ex totidem planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries Quadratis ſecundanorum, hoc eſt quartanis, reciproca, cujus index $-4 = -2 -2$; ejuſque ratio ad Cylindrum vel Priſma de-

hinc

bite inscriptum, ut 1 ad $-4+1=-3$. (per Prop. 104.) Nempe utrobiq; ratio plusquam infinita.

SCHOLIUM.

Atque ita problema illud (ingeniosum quidem, & non paucis mirandum,) quod Torricellius in una figura solida præstitit; (puta, *Solido Hyperbolico acuto* in infinitum continuato, æquale cylindrum constituere) nos in aliis innumeris figuris tam planis quam solidis (præcedentibus sex propositionibus continuis) præstitimus. Puta, *Figuris innumeris specie differentibus, tam planis quam solidis, interminatis, æquales figuras terminatas* (vel saltem, quod tantundem valet, in cognita ratione constitutas) *exhibere.*

Consultius fortassis esset, (si tantum aucupandæ famæ operam darem,) celata methodo qua huc perventum est, paucas aliquot particulares propositiones (tanquam admirandum quidpiam aut stupendum) demonstrationibus apagogicis ostendisse. quod veteres olim non raro fecisse, plane suspicor; qui illud sæpius sibi videntur proposuisse, ut ipsos alii admirentur potius quam intelligant; saltem ut illis eorum effatis assensum coacti præbeant, potius quam ut genuinam problematis investigationem intelligant. Atque hinc factum esse credo, quod eorum Analytice (quam quidem ipsos habuisse ex multis ipsius, in demōstrationibus eorum non paucis, vestigiis satis liquet) posteros fere penitus latuerit; (exigua enim plane pars illa est quæ apud Diophantum exstat, si ad egregia illa quo ipsi pervenerunt inventa comparetur:) Ut necesse habuerint præsentis ævi mathematici (*Vieta, Oughtredus, Harriotus, Ghetaldus, Cavallerius, Torricellius, Chartesius*, aliique magni viri) vel novam excogitare, vel antiquam saltem (conclamatam plane & penitus ignoratam) de novo resuscitare; quod quidem eo successu præstiterunt, ut nostram nunc dierum Analyticen, veterum istam, tanta superstitione celatam, æquare saltem vel superare potius nullus dubitem.

Verum ergo mallem libere philosophando, fontes ipsos aperire, ut eadem opera possit lector & propositionum demonstrationes & methodum qua istuc pervenerim persentiscere; unde & ipse possit proprio marte ejusmodi alias innumeras investigare, quas ego (ne tædio sim) lubens prætereo, contentus eo digitum intendisse, unde alii alia nostris similia pro libitu depromant.

Licuisset quidem & præmissis multa subjungere, & multa passim interpolare, quæ ex principiis jam traditis facile deduci possent. Verum cum ea, quæ jam tradidi, mihi videantur abunde sufficere, ut & ipsa perspicue satis intelligantur, & perfectam satis *seriërum* (tam simplicium quam compositarum & utrisque Reciprocarum) tractationem videantur continere: ad series *Conjunctas* (sive ad Binomiorum sive Apotomarum formam) explicandas, festinandum sentio.

PROP. CVIII. *Theorema.*

SI series Æqualium serie Primanorum respective mulctetur (puta, si primus terminus hujus a primo illius auferatur, secundus a secundo, &c.) Residua erunt semissis totius: sin ita augeatur; Aggregatorum series erit expositæ seriei Æqualium sesquialtera.

Intellige, si Æqualium & Primanorum terminus ultimus idem sit (vel æqualis) Quod & deinceps aliquoties intelligendum erit: sin fuerint inæquales, non tamen erit difficile rationes provenientes invenire; quod monuisse sufficiat, cum id quilibet suo marte præstare poterit.

Sit verbi gratia terminus Æqualium quilibet & primanorum maximus R; ejusque pars infinite parva dicatur $a = \frac{R}{\infty}$; numerus terminorum omnium (vel figuræ altitudo A:) si Termini

$$\begin{cases} R - 0a & R + 0a \\ R - 1a & R + 1a \\ R - 2a & R + 2a \\ R - 3a & R + 3a \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{cases}$$

continuentur in infinitum usque ad .... $R - R \qquad R + R$

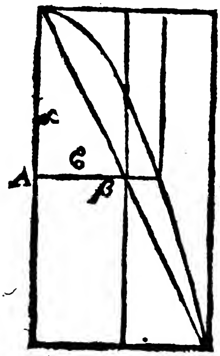
erit Residuorũ & Aggregatorũ sũma ... $AR - \frac{1}{2}AR \qquad AR + \frac{1}{2}AR$

Nam omniũ Æqualium agregatũ erit AR (ut patet;) Primanorum aggregatum ejusdem semissis $\frac{1}{2}AR$, per Prop. 2.) Ergo $AR - \frac{1}{2}AR = \frac{1}{2}AR$, & $AR + \frac{1}{2}AR = \frac{3}{2}AR$. Nempe seriei Æqualium (AR) illud est $\frac{1}{2}$, hoc $\frac{3}{2}$: prout affirmatur. Hoc est, erit illud ad seriem æqualium ut $\frac{1}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad 2: hoc autem, ut $\frac{3}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad $\frac{2}{3}$, vel 3 ad 2.

PROP.

PROP. CIX. *Coroll.*

ERgo, *Si Parallelogrammò auferatur Triangulum (super eâdem vel æquali base æquè-altum) Residuum (quod quidem & ipsum erit Triangulum inversum) erit Parallelogrammi semissis: sin addatur Triangulum, erit aggregatum (nempe Trapezium) sesquialterum.*



Patet ex præcedenti; est enim Parallelogrammum series Æqualium; Triangulum, series Primanorum.

PROP. CX. *Coroll.*

ITem, *Cylindrus Parabolicè excavatus, est pleni semissis. (Quod idem verum est de Prismate analogice excavato.)*

Nempe si ex Cylindro (serie nempe Æqualium (eximatur conoides Parabolicum (super eadem base æque-altum) quod quidem est series primanorum (per Prop. 4, vel 60.) quod reliquum est erit semissis totius per Prop. 108.

Atque idem accidet si Prismati eximatur Pyramidoides Parabolicum.

PROP. CXI. *Theorema.*

SI Series Æqualium mulctetur serie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Residua erunt totius duo Trientes, tres Quadrantes, quatuor Quintantes, &c. Sin ita augeatur, erunt Ag-

gregata ejusdem Sesquitertium, Sesquiquartum, Sesquiquintum, &c.

Nempe si Termini $\begin{cases} R^2 \pm 0a^2 & R^3 \pm 0a^3 & R^4 \pm 0a^4 \\ R^2 \pm 1a^2 & R^3 \pm 1a^3 & R^4 \pm 1a^4 \\ R^2 \pm 4a^2 & R^3 \pm 8a^3 & R^4 \pm 16a^4 \\ R^2 \pm 9a^2 & R^3 \pm 27a^3 & R^4 \pm 81a^4 \end{cases}$
&c. &c. &c.

continuentur usq; ad $R^2 \pm R^2$ $R^3 \pm R^3$ $R^4 \pm R^4$

erunt summæ $AR^2 \pm \frac{1}{3}AR^2$. $AR^3 \pm \frac{1}{4}AR^3$. $AR^4 \pm \frac{1}{5}AR^4$

(per Prop. 44)

Hoc est, Residuorũ summa $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ &c.

Aggregatorum summa $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ &c.

PROP. CXII. *Coroll.*

Ergo, *si Parallelogrammo auferatur complementum Semi-parabolæ, Semi-paraboloidis cubicalis, Biquadraticalis, &c. Residuum (puta semi-parabola, semi-paraboloides cubicale, biquadraticale, &c.) erit* $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, *&c. totius Parallelogrammi: sin eidem Parallelogrammo ejusmodi complementum addatur, erit aggregatum* $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$, *&c. Ejusdem Parallelogrammi.*

Patet ex præcedente.

PROP. CXIII. *Coroll.*

Item, *Cylindrus Conicè excavatus, (vel Prisma Pyramidicè,) continet integri duos trientes. Et similiter de aliis excavationibus (mutatis mutandis) fiet judicium.*

Patet ex Prop. 111. subducta quippe serie secundanorum, ex serie Æqualium.

PROP.

PROP. CXIV. *Theorema.*

SI Series Æqualium mulctetur serie subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. Residua erunt totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejusdem quinq; Trientes, septem Quadrantes, novem Quintantes, &c. vel, duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.

Nẽpe si termini.	$\sqrt{R} \pm \sqrt{0a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{0a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{0a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{1a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{1a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{1a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{2a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{2a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{2a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{3a}$	$\sqrt[2]{R} \pm \sqrt[3]{3a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{3a}$
	&c.	&c.	&c.
Continuentur ad	$\sqrt{R} \pm \sqrt{R}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[2]{R}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{R}$

Erũt sũmæ $A\sqrt{R} \pm \frac{2}{3}A\sqrt{R}$. $A\sqrt[2]{R} \pm \frac{3}{4}A\sqrt[3]{R}$. $A\sqrt[4]{R} \pm \frac{4}{5}A\sqrt[4]{R}$ (per prop. 54.)

Hoc est, Residuorum summa	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
Aggregatorum summa	$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	$1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

PROP. CXV. *Corollarium.*

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Parabola, Paraboloides Cubicale, Biquadraticale, &c. Residuum erit totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin addatur, erit Aggregatum Parallelogrammi duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.*

Sequitur ex præced.

PROP.

PROP. CXVI. *Theorema.*

PAri modo judicandum erit in seriebus aliis seriei Æqualium addendis vel subducendis; quarum quantitas innotescit ex prop. 59. vel 64.

Puta si termini	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{0a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{0a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{0a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{1a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{1a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{1a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{8a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{4a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{16a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{27^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{9a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{81a^4}$.
	&c. ad	&c. ad	&c. ad
continuentur ad	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{R^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{R^4}$.
summa	$A\sqrt{R^3} \pm \frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$	$A\sqrt[3]{R^2} \pm \frac{3}{5}A\sqrt[3]{R^2}$	$A\sqrt[3]{R^4} \pm \frac{3}{7}A\sqrt[3]{R^4}$
Hoc est, Residua	$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.	$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$	$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$
Aggregata	$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$	$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$	$1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$

Et similiter (mutatis mutandis) in aliis quibuscunq;.

PROP. CXVII. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Primanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Placet autem pro notis $1a$, $2a$, $3a$, &c. (in præcedentibus propositionibus usurpatis) jam substituere a, b, c, &c. quo melius operationis processus perspiciatur.

PROP.

Seriei	Quadrata.	Cubi
$R - 0$	$R^2 - 0R + 00$	$R^3 - 0R^2 + 0R - 000$
$R - a$	$R^2 - 2aR + a^2$	$R^3 - 3aR^2 + 3a^2R - a^3$
$R - b$	$R^2 - 2bR + b^2$	$R^3 - 3bR^2 + 3b^2R - b^3$
$R - c$	$R^2 - 2cR + c^2$	$R^3 - 3cR^2 + 3c^2R - c^3$
&c. ad	&c. ad	&c. ad
$R - R$	$R^2 - 2RR + R^2$	$R^3 - 3RR^2 + 3R^2R - R^3$
$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR^2 - \frac{2}{2}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$	$AR^3 - \frac{3}{2}AR^3 + \frac{3}{3}AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$
nempe $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
vel $\frac{1}{2}$	$\frac{1 \times 2}{2 \times 3}$	$\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}$

Et sic deinceps, continuè multiplicando numeros arithmeticè proportionales, (prout potestatis gradus postulat) ab 1 & 2, unitate continuè crescentes.

Et quidem nihil aliud sunt quam totidem series Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. inversa.

PROP. CXVIII. *Theorema.*

SI supponatur series Æqualium mulctata serie secundanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium rationem habebunt cognitam. Nempe

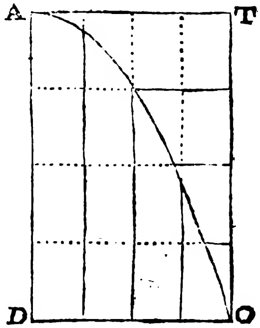
Seriei	Quadrata	Cubi
$R^2 - 00$	$R^4 - 00R^2 + 00$	$R^6 - 00R^4 + 00R^2 - 00$
$R^2 - a^2$	$R^4 - 2a^2R^2 + a^4$	$R^6 - 3a^2R^4 + 3a^4R^2 - a^6$
$R^2 - b^2$	$R^4 - 2b^2R^2 + b^4$	$R^6 - 3b^2R^4 + 3b^4R^2 - b^6$
$R^2 - c^2$	$R^4 - 2c^2R^2 + c4$	$R^6 - 3c^2R^4 + 3c^4R^2 - c^6$
&c. ad	&c. usq; ad	&c. usq; ad
$R^2 - R^2$	$R^4 - 2R^2R^2 + R^4$	$R^6 - 3R^2R^4 + 3R^4R^2 - R^6$
summa $AR^2 - \frac{1}{3}AR^2$	$AR^4 - \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$AR^6 - \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 - \frac{1}{7}AR^6$
nempe $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$	$1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{48}{105}$
vel $\frac{3}{4}$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$

Et sic deinceps, continue multiplicando numeros arithmetice proportionales (quousque gradus potestatis postulat) a 2 & 3 continue binario crescentes.)

PROP. CXIX. *Corollarium.*

ET propterea, *Conoides (vel Pyramidoides) semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) circa ipsius ordinatim-applicatam aptatum, erit ad Cylindrum (vel Prisma) ejusdem basis & altitudinis, ut* 8 *ad* 15.

Nempe ut Quadrata residuorum seriei Æqualium mulctatæ serie secundanorum, (ad totidem maximo æqualium) Nam si volvendo semiparabolam A D O circa ipsius ordinatim-applicatam D O, ut axem (vel etiam alias, ut Prop. 9 Con. Sect. diximus,) formetur conoides (vel Pyramidoides) cujus vertex O: erunt plana illa Conoides (vel Pyramidoides) constituentia ut Quadrata seriei Æqualium serie secundanorum mulctatæ:



(Nam rectæ in semiparabola A D O Diametro A D parallelæ, sunt residuæ Æqualium ablatis secundanis, in complemento A T O repertis, ut patet ex dictis Prop. 23.) Ideoq; ad totidem maximo æqualia (hoc est, Cylindrum vel Prisma,) ut 8 ad 15 per præcedentem.

SCHOLIUM.

Et pari modo de conoidibus vel Pyramidoidibus ad Paraboloidis cujusvis ordinatim applicatam aptatis, judicium fiet, ope sequentium propositionum. Puta in Paraboloide cubicali ratio erit ut 9 ad 14; in Biquadraticali, ut 32 ad 45; in surdesolidali, ut 25 ad 33, &c. ut in tab. Prop. 126.

PROP.

PROP. CXX. *Corollarium.*

Deinde, *Si infinita series Æqualium multata serie Primanorum, in eandem seriem Æqualium eâdem serie Primanorum auctam, respectivè ducatur: Rectangulorum (vel Quadratorum aut etiam similium quarumvis figurarum, ipsis æqualium, aut quidem proportionalium) Aggregatum, ad aggregatum totidem maximo Æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atq; idem accidet, si Quadrata seriei multatæ ducantur in Quadrata seriei auctæ; & Cubi illius in Cubos hujus; & sic deinceps.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. 118. Nam

$$\begin{array}{llll} & R-a & Q:R-a:=R^2-2aR+a^2 \\ \text{in} & R+a & Q:R+a:=R^2-2aR+a^2 \\ \hline \text{facit} & R^2-a^2 & R^4-2a^2R^2+a^4 \\ & \&c. & \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & C:R-a:=R^3-3aR^2+3a^2R-a^3 \\ \text{in} & C:R+a:=R^3+3aR^2+3a^2R+a^3 \\ \hline \text{facit} & R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6 \\ & \&c. \end{array}$$

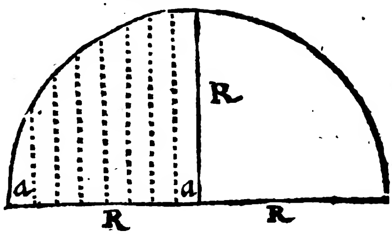
& sic in singulis terminis cujusvis potestatis; ut multiplicando patebit Prop. 121.

PROP. CXXI. *Corollarium.*

Ideoq; *Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Ellipsis qualibet ad Parallelogrammum sibi circumscriptum,) eam habet rationem, quam habent Radices quadraticæ universales Residuorum seriei infinitæ Æqualium serie Secundanorum multatæ, ad seriem illam Æqualium.*

 Nam

Nam si circuli Radius ponatur R, (cujus Pars infinite parva $\frac{R}{\infty} = a$,) eique insistant Perpendiculares sive sinus recti numero infiniti Quadrantem circuli complentes; erunt illæ perpendiculares mediæ proportionales inter Diametri Segmenta, (ut notum est;) hoc est.



inter $R+0,\quad R+1a,\quad R+2a,\quad R+3a,$ &c.
& $\underline{R-0,\quad R-1a,\quad R-2a,\quad R-3a,}$ &c.

quorũ Rectangula, $\Big\}\ R^2-00,\quad R^2-1a^2,\quad R^2-4a^2,\quad R^2-9a^2$ &c.

Ipsæq; mediæ proportionales $\Bigg\}\ \sqrt{:R^2-00}.\quad \sqrt{:R^2-1a^2}.\quad \sqrt{:R^2-4a^2},\quad \sqrt{:R^2-9a^2},$ &c.

quam igitur rationem habeat harum radicum universalium Aggregatum, ad totidem maximæ (Radio scil.) æqualium, eam habet quadrans circuli (ex illis constans) ad quadratum Radii (constans ex his.) Adeoque & circulus integer ad quadratum Diametri. Quod erat ostendendum.

Atque idem de qualibet ellipsi (mutatis mutandis) facile ostendetur; cum ipsius etiam ordinatim-applicatæ sint mediis proportionalibus (inter diametri trasversæ segmenta) proportionales, & quidem nonnunquam æquales, ut ex conicorum doctrina notum est.

SCHOLIUM.

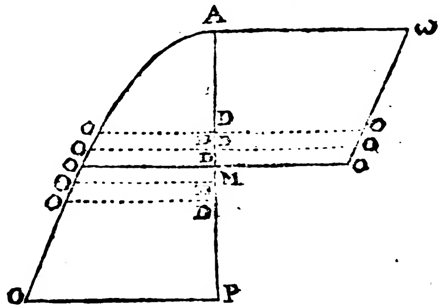
Ratio autem quam innuit hæc propositio (circuli nempe ad quadratum Diametri) ea est, quam habet Unitas ad numerum intermedium inter 1 & $\frac{1}{2}$ in secunda serie Transversa Tabellæ Prop 127. Quomodo autem invenietur numerus ille (vel alius quivis istius seriei numeris interponendus) deinceps inquirendum erit.

PROP.

PROP. CXXII. *Corollarium.*

ET proinde, *si supponamus infinitas rectas semiparabolæ cujusvis, in ejusdem continuationis æquè-altæ & situ inverso positæ rectas, respectivè duci; quod provenit solidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum (aut ex Quadratis quæ rectangulis illis sint æqualia) erit ad Parallelepipedum super eadem base æquè-altum, ut circulus ad Quadratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in subduplicatâ ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel Ellipsi.)*

Semiparabolam quamlibet APO, secet recta MO (basi parallela) in duo segmenta æque alta; & Recta MO dicatur $\sqrt{}$ R. Erunt reliquæ ordinatim-applicatæ in segmento superiori ascendendo, $\sqrt{:}R - a$. $\sqrt{:}R - 2a$. $\sqrt{:}R - 3a$. &c. Et in segmento inferiori descendendo, $\sqrt{:}R + a$. $\sqrt{:}R + 2a$. $\sqrt{:}R + 3a$. &c. (propter quadrata ordinatim-applicatarũ in parabola, arithmetice proportionalia) Ideoq; si supponamus semiparabolã ita sectam sic in se replicari, ut punctum P puncto A congruat, totumq; segmentum MPO transferatur in situm MAω, (ut ordinatim-applicatæ inferioris segmenti ordinatim applicatis superioris inverse respondeant) rectangula, OD o, OD o, &c. Erunt $\sqrt{:}R^2 - o$. $\sqrt{:}R^2 - a^2$. $\sqrt{:}R^2 - 4a^2$ $\sqrt{:}R^2 - 9a^2$, &c. ut multiplicatiõne patebit.



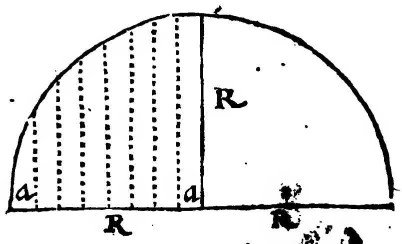
$\sqrt{:}R - o.$	$\sqrt{:}R - a.$	$\sqrt{:}R - 2a.$	$\sqrt{:}R - 3a.$
$\sqrt{:}R + o.$	$\sqrt{:}R + a.$	$\sqrt{:}R + 2a.$	$\sqrt{:}R + 3a.$
$\sqrt{:}R^2 - o$	$\sqrt{:}R^2 - a^2$	$\sqrt{:}R^2 - 4a^2$	$\sqrt{:}R^2 - 9a^2$. &c.

Horum igitur omnium aggregatum, ad maximum ($\sqrt{:R^2 - o:} = \sqrt{R^2} = R$) toties positum, hoc est, solidum propositum ad Parallelepidum ejusdem basis & altitudinis,) ut circulus ad quadratum Diametri per præced. Et propterea etiam mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel ellipsi, ut patet.

PROP. CXXIII. *Corollarium.*

ITem, *Sphæra (vel Sphæroides aut etiam Pyramidoides Ellipticum,) ad cylindrum (vel Prisma) circumscriptum; est ut series infinita Æqualium mulctata serie secundanorum, ad seriem totidem maximo Æqualium. Hoc est ut 2 ad 3.*

Sequitur ex Prop. 121. Nam si mediæ proportionales inter diametri segmen a, quadrantem circuli (vel ellipseos) complentes, jam fieri supponantur totidem aliorum circulorum invicem parallelorum radii, semissem sphæræ (vel sphæroideos) complentium, (vel similium quorumvis



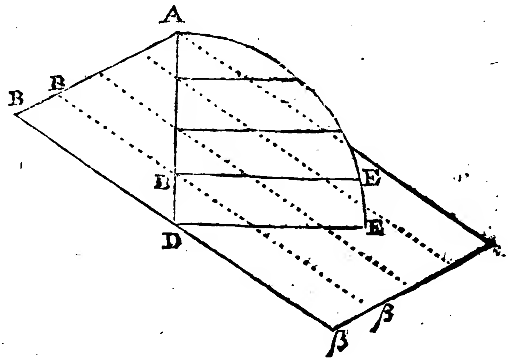
planorum rectæ similiter positæ semipyramidoides ellipticum constituentium;) erunt hi circuli (vel plana) in duplicata ratione Radiorum suorum (sive rectarum similiter positarum:) Hoc est, ut $R^2 - o$. $R^2 - a^2$. $R^2 - 4a^2$ $R^2 - 9a^2$, &c. (sunt enim rectæ illæ $\sqrt{:R^2 - o}$. $\sqrt{:R^2 - a^2}$, $\sqrt{:R^2 - 4a^2}$, $\sqrt{:R^2 - 9a^2}$ &c. per Prop. 121.) Ideoque horum omnium aggregatum, ad aggregatum omnium maximo æqualium ut 2 ad 3. per Prop. 108.

PROP.

PROP. CXXIV. *Corollarium.*

Item, si Trianguli A D B rectæ respective ducantur in rectas Trapezii A D B (æque-alti, atque cum ipso Triangulo Parallelogrammum complentis;) quæ prodeunt rectangula erunt æqualia totidem similibus planis Conoideos (vel Pyramidoideos) elliptici: Et mediæ proportionales D E, D E, &c. Erunt ordinatim applicatæ in (Circulo, vel saltem) Ellipsi.

Demonstratio facile patet ex dictis ad Prop. 121. Et 123. Nam segmenta rectæ Bβ in hac figura tantundem valent atque segmenta Diametri in illa figura.



Si autem tam rectæ A D, D B, sint æquales, quam rectæ AD, DE, ad invicem perpendiculares, erunt ipsæ D E, D E, ordinatim-applicatæ in circulo; sint minus, saltem in ellipsi. Portio autem sive circuli sive Ellipseos A E, major est aut minor quam Quadrans, prout D B major est aut minor quam D β.

PROP. CXXV. *Corollarium.*

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo

æqualium

æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nempe,

Seriei	Quadrata	Cubi.
$R^3 - 000$	$R^6 - 00R^3 + 00$	$R^9 - 00R^6 + 00R^3 - 00$
$R^3 - a^3$	$R^6 - 2a^3R^3 + a^6$	$R^9 - 3a^3R^6 + 3a^6R^3 - a^9$
$R^3 - b^3$	$R^6 - 2b^3R^3 + b^6$	$R^9 - 3b^3R^6 + 3b^6R^3 - b^9$
$R^3 - c^3$	$R^6 - 2c^3R^3 + c^6$	$R^9 - 3c^3R^6 + 3c^6R^3 - c^9$
&c. ad	&c. usq; ad	&c. usq; ad
$R^3 - R^3$	$R^6 - 2R^3R^3 + R^6$	$R^9 - 3R^3R^6 + 3R^6R^3 - R^9$
ſūma $AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$	$AR^6 - \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$	$AR^9 - \frac{3}{4}AR^9 + \frac{3}{7}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9$
nēpe $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{7} = \frac{18}{28}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{10} = \frac{162}{280}$
vel $\frac{3}{4}$	$\frac{3 \times 6}{4 \times 7}$	$\frac{2 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10}$

& ſic deinceps, continue mutiplicando numeros arithmetice proportionales (quouſque cujuſlibet poteſtatis gradus poſtulat) a 3 & 4, ternario continue creſcentes.

PROP. CXXVI. *Coroll.*

Pari modo, ſi exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. $1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{32}{45}$. $1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} - \frac{1}{13} = \frac{384}{585}$ $1 - \frac{4}{5} + \frac{6}{9} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17} = \frac{6144}{9945}$.

vel $\frac{4}{5}$ $\frac{4 \times 8}{5 \times 9}$ $\frac{4 \times 8 \times 12}{5 \times 9 \times 13}$ $\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17}$

Itē $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. $1 - \frac{2}{6} + \frac{1}{11} = \frac{50}{66}$. $1 - \frac{3}{6} + \frac{3}{11} - \frac{1}{16} = \frac{750}{1056}$, $1 - \frac{4}{6} + \frac{6}{11} - \frac{4}{16} + \frac{1}{21} = \frac{15000}{22176}$

vel $\frac{5}{6}$ $\frac{5 \times 10}{6 \times 11}$ $\frac{5 \times 10 \times 15}{6 \times 11 \times 16}$ $\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{6 \times 11 \times 16 \times 21}$

Et ſic in aliis quibuſlibet; nempe continue multiplicando numeros arithmetice proportionales (quouſque gradus poſtulat) a 4 & 5, vel 5 & 6, vel 6 & 7, &c. quaternario, vel Quinario

nario, vel senario, &c. (secundum indicem seriei subductæ) continuè crescentes. Prout inductiône patebit. Ad hunc modum.

Ratio quam habet ad seriem maximo æqualium.

Seriei Æqualium mulctatæ serie	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Surdesolida.
Primanorũ	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$.	$\frac{2}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{24}$.	$\frac{6}{24}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{120}$.	$\frac{24}{120}\times\frac{5}{6}=\frac{120}{720}$.
Secũdanor.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.	$\frac{8}{15}\times\frac{6}{7}=\frac{48}{105}$.	$\frac{48}{105}\times\frac{8}{9}=\frac{384}{945}$.	$\frac{384}{945}\times\frac{10}{11}=\frac{3840}{10395}$.
Tertianorũ.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{18}{28}$.	$\frac{18}{28}\times\frac{9}{10}=\frac{162}{280}$.	$\frac{162}{280}\times\frac{12}{13}=\frac{1944}{3640}$.	$\frac{1944}{3640}\times\frac{15}{16}=\frac{29160}{58240}$.
Quartanor.	$\frac{4}{5}$.	$\frac{4}{5}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{45}$.	$\frac{32}{45}\times\frac{12}{13}=\frac{384}{585}$.	$\frac{384}{585}\times\frac{16}{17}=\frac{6144}{9945}$.	$\frac{6144}{9945}\times\frac{20}{21}=\frac{122880}{208845}$.
Quintan.	$\frac{5}{6}$.	$\frac{5}{6}\times\frac{10}{11}=\frac{50}{66}$.	$\frac{50}{66}\times\frac{15}{16}=\frac{750}{1056}$.	$\frac{750}{1056}\times\frac{20}{21}=\frac{15000}{22176}$.	$\frac{15000}{22176}\times\frac{25}{26}=\frac{375000}{576576}$.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps;

Nempe

Nempe, si index seriei ablatæ ponatur a; rationem habebunt, ad seriem maximo Æqualium, ipsa

	Residua.	Quadrata.	Cubi.	&c.	
quam habent	$\frac{a}{a+1}$.	$\frac{a}{a+1} \times \frac{2a}{2a+1}$.	$\frac{a}{a+1} \times \frac{2a}{2a+1} \times \frac{3a}{3a+1}$.	&c.	ad unitatem. vel
vel	$\frac{a}{a+1}$.	$\frac{2a^2}{2a^2+3a+1}$.	$\frac{6a^3}{6a^3+11a^2+6a+1}$.	&c.	
quā habet unitas ad	$\frac{a+1}{a}$.	$\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a}$.	$\frac{a+1}{a} \times \frac{2a\times 1}{a} \times \frac{3a+1}{2a}$.	&c.	
vel	$\frac{a+1}{a}$.	$\frac{2a^2+3a+1}{2a^2}$.	$\frac{6a^3 + 11a^2+6a+1}{6a^3}$.	&c.	

Atq; hoc idem valebit si ablata series sit series Radicum.

Verbi gratia. Si a serie Æqualium auferatur series Subsecundanorum cujus index $\frac{1}{2}$. Nam si ponatur $a = \frac{1}{2}$. Erit $\frac{a+1}{a} = 3$. Et $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} = 3 \times 2 = 6$. Et $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{a} \times \frac{3a+1}{3a} = 3 \times 2 \times 1\frac{2}{3} = 10$. &c. Sunt autem, in ejusmodi ablationibus, Residua, quadrata, Cubi, &c. ad seriem maximo æqualium; ut 1 ad 3. 6. 10. &c.

Similiter, si auferatur series Subquartanorum, cujus index $\frac{1}{4}$; & ponatur $a = \frac{1}{4}$. Erit $\frac{a+1}{a} = 5$. $\frac{2a+1}{2a} = 3$. $\frac{3a+1}{3a} = 2\frac{1}{3}$. $\frac{4a+1}{4a} = 2$. &c. $5 \times 3 = 15$. $15 \times 2\frac{1}{3} = 35$. $35 \times 2 = 70$. &c. Sunt autem, in ejusmodi Sublationibus, Residua, quadrata, cubi, biquadrata, &c. ut 1 ad 5, 15, 35, 70 &c. Et pariter in ejusmodi aliis, ut deinceps etiam ulterius patebit.

Interim placet propositiones aliquot præcedentes in Tabellam conjicere, propositioni sequenti subjungendam. Nempe.

PROP. CXXVII. *Theorema.*

SI exponatur (infinita) series Æqualium mulctata serie (analoga) Primanorum; Secundanorum, Tertianorum, &c. Residua ipsa, eorumq; Quadrata

Quadrata, Cubi,&c. Eam rationem habebunt ad expositam seriem Æqualium; quam habet Unitas ad numeros in subjecta Tabella indicatos. Nempe ---

Seriei Æqualium mulctatæ serie

	Resid.	Q.	Cubi	Biq.	Surdes.	Sextana.
Primanorum	1 $\frac{2}{1}$	1 $\frac{6}{2}$	1 $\frac{24}{6}$	1 $\frac{120}{24}$	1 $\frac{720}{120}$	1 $\frac{5040}{720}$
Secundanor.	1 $\frac{3}{2}$	1 $\frac{15}{8}$	1 $\frac{105}{48}$	1 $\frac{945}{384}$	1 $\frac{10395}{3840}$	1 $\frac{135135}{46080}$
Tertianorũ	1 $\frac{4}{3}$	1 $\frac{28}{18}$	1 $\frac{280}{162}$	1 $\frac{3640}{1944}$	1 $\frac{58240}{24160}$	1 $\frac{1106560}{524880}$
Quartanorũ	1 $\frac{5}{4}$	1 $\frac{45}{32}$	1 $\frac{585}{384}$	1 $\frac{9945}{6144}$	1 $\frac{208845}{192880}$	1 $\frac{5221125}{2949120}$
Quintanorũ	1 $\frac{6}{5}$	1 $\frac{66}{50}$	1 $\frac{1056}{750}$	1 $\frac{22176}{15000}$	1 $\frac{576576}{375000}$	1 $\frac{17873856}{11250000}$
Sextanorum	1 $\frac{7}{6}$	1 $\frac{91}{72}$	1 $\frac{1729}{1296}$	1 $\frac{43225}{31104}$	1 $\frac{1339975}{933120}$	1 $\frac{49579075}{33592320}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Sequitur [ex præced.

SCHOLIUM.

Verum quo pacto investigabitur, quam habeant rationem serierum illarum Apotomarum Radices quadraticæ, Cubicæ, &c. ad seriem totidem earum maximæ æqualium: Hic labor hoc opus est. Nihil enim aliud deest ad Circuli & Elipseos quadraturam. Ut ex Prop 121. jam patet,& ex propositionibus aliquot secuturis ulterius patebit.

PROP. CXXVIII. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Subsecundanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{R} - \sqrt{a}$	$R - 2\sqrt{aR} + a$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{a} + 3a\sqrt{R} - a\sqrt{a}$
$\sqrt{R} - \sqrt{b}$	$R - 2\sqrt{bR} + b$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{b} + 3b\sqrt{R} - b\sqrt{b}$
$\sqrt{R} - \sqrt{c}$	$R - 2\sqrt{cR} + c$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{c} + 3c\sqrt{R} - c\sqrt{c}$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt{R} - \sqrt{R}$	$R - 2\sqrt{RR} + R$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{R} + 3R\sqrt{R} - R\sqrt{R}$
$A\sqrt{R} - \frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$AR - \frac{4}{3}AR + \frac{1}{2}AR$	$AR\sqrt{R} - \frac{6}{3}AR\sqrt{R} + \frac{3}{2}AR\sqrt{R} - \frac{2}{5}AR\sqrt{R}$
$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$1 - \frac{6}{3} + \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{12}$
$\frac{1}{1 \times 2}$	$\frac{1}{1 \times 2 \times 3}$	$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 + 4}$

Et sic deinceps; nempe eam rationem quam habet 1 ad numeros triangulares, sive aggregatum numerorum arithmetice proportionalium (quousque gradus potestatis postulat) ab 1 continue unitate crescentium.

PROP. CXXIX. *Corollarium.*

ET Propterea, *Conoides (vel Pyramidoides) Complemento Semiparabolæ circa ipsius Ordinatim-applicatam aptatum, est ad Cylindrum (vel prisma) ejusdem basis & altitudinis, ut* 1 *ad* 6.

Nempe ut quadrata residuorum seriei Æqualium mulctatæ serie subsecundanorum, ad totidem maximo æqualium. Cum enim in semiparabolæ complemento AOT, rectæ [illegible] diametro AT parallelæ, sint residua Æqualium demptis subsecundanis nempe (ordinatim-applicatis in semi-parabola AOD;) si volvendo complementum illud AOT circa ipsam OT ut axem (vel etiam alias, ut alibi dictum est,) formetur conoides, (aut etiam Pyramidoides analogum) cujus vertex O; circuli sic volvendo descripti (vel similia plana similiter posita) erunt in rectarum illarum (ipsi AT parallelarum) ratione duplicata. Hoc est, ut quadrata Residuorum seriei Æqualium sublatis secundanis; ideoque ut 1 ad 6 per præced.

In Fig. Prop. 119.

SCHO-

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit de Conoidibus & Pyramidoidibus complementi ſemiparaboloidis cujuſvis circa ipſius ordinatim-applicatam aptatis, juxta propoſitiones ſequentes: Nempe mutatis mutandis, prout ſemiparaboloidis gradus poſtulaverit. Puta in ſemiparaboloide cubicali, ut 1 ad 10; in Biquadraticali, ut 1 ad 15; in Surdeſolidali, 1 ad 21. &c. juxta tabellam Prop. 131.

PROP. CXXX. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie ſubtertianorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{aR} + \sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{aR^2} + 3\sqrt[3]{a^2R} - \sqrt[3]{a^3}$
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{bR} + \sqrt[3]{b^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{bR^2} + 3\sqrt[3]{b^2R} - \sqrt[3]{b^3}$
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{c}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{cR} + \sqrt[3]{c^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{cR^2} + 3\sqrt[3]{c^2R} - \sqrt[3]{c^3}$
&c. ad	&c. ad	&c. uſque ad
$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R}$	$\sqrt[3]{R^2} - 2\sqrt[3]{RR} + \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{RR^2} + 3\sqrt[3]{R^2R} - \sqrt[3]{R^3}$
$A\sqrt[3]{R} - \frac{3}{4} = A\sqrt[3]{R}$	$A\sqrt[3]{R^2} - \frac{6}{4}A\sqrt[3]{R^2} + \frac{3}{5}A\sqrt[3]{R^2}$	$AR - \frac{9}{4}AR + \frac{9}{5}AR - \frac{1}{2}AR$
$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{6}{4} + \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$	$1 - \frac{9}{4} + \frac{9}{5}A - \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$
$\frac{1}{1+3=4}$	$4+6=10$	$\frac{1}{10+10=20}$

Et ſic deinceps; continue addendo numeros triagulares ſeu aggregata numerorum arithmetice proportionalium, ut habeatur conſequens rationis cujus antecedens eſt 1.

PROP. CXXXI. *Theorema.*

Pari modo, Si exponatur series Æqualium mulctata serie Subquartanorum, Subquintanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nam ut in subductione seriei subsecundanorum, consequentes rationum fiunt continua additione numerorum arithmetice proportionalium, $1+2=3$. $1+2+3=3+3=6$. $1+2+3+4=6+4=10$. $1+2+3+4+5=10+5=15$. $1+2+3+4+5+6=15+6=21$. &c Ita in subductione subtertianorum consequentes rationum fiunt continua additione numerorum illorum (3, 6, 10, 15, 21, &c.) in subductione subsecundanorum modo inventorum; nempe $1+3=4$. $4+6=10$. $10+10=20$. $20+15=35$. $35+21=56$. &c. vel $1+1+2=1+3=4$. $4+1+2+3=1+3+6=10$. $10+1+2+3+4=1+3+6+10=20$. $20+1+2+3+4+5=1+3+6+10+15=35$. $35+1+2+3+4+5+6=1+3+6+10+15+21=56$. &c. Deinde ex numerorum jam inventorũ (4, 10, 20, 35, 56, &c.) continua additione fiunt consequentes rationũ in subductione seriei subquartanorum, (nēpe $1+4=5$. $5+10=15$. $15+20=35$. $35+56=91$. &c.) Et ex horum iterum continua additione, fiunt consequentes rationum in subductione seriei proximæ (subquintanorum;) Et sic deinceps ad hunc modum.

Ratio

Seriei Æqualium mulctatæ ferie

	Refidua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Surdefolida	Sextana.
	Ratio quam habent ad feriem maximo Æqualium					
Primanor.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$	$\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$	$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}.$	$\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}.$	$\frac{1}{5+1}=\frac{1}{6}.$	$\frac{1}{6+1}=\frac{1}{7}.$
Subfecun.	$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}.$	$\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$	$\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}.$	$\frac{1}{10+5}=\frac{1}{15}.$	$\frac{1}{15+6}=\frac{1}{21}.$	$\frac{1}{21+7}=\frac{1}{28}.$
Subtertia.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}.$	$\frac{1}{4+6}=\frac{1}{10}.$	$\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}.$	$\frac{1}{20+15}=\frac{1}{35}.$	$\frac{1}{35+21}=\frac{1}{56}.$	$\frac{1}{56+28}=\frac{1}{84}.$
Subquart.	$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{5}.$	$\frac{1}{5+10}=\frac{1}{15}.$	$\frac{1}{15+20}=\frac{1}{35}.$	$\frac{1}{35+35}=\frac{1}{70}.$	$\frac{1}{70+56}=\frac{1}{126}.$	$\frac{1}{126+84}=\frac{1}{210}.$
Subquint.	$\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}.$	$\frac{1}{6+15}=\frac{1}{21}.$	$\frac{+}{21+35}=\frac{1}{56}.$	$\frac{1}{56+70}=\frac{1}{126}.$	$\frac{1}{120+126}=\frac{1}{252}.$	$\frac{1}{252+210}=\frac{1}{462}.$
Subfext.	$\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}.$	$\frac{1}{7+21}=\frac{1}{28}.$	$\frac{1}{28+56}=\frac{1}{84}.$	$\frac{1}{84+126}=\frac{1}{210}.$	$\frac{1}{210+252}=\frac{1}{462}.$	$\frac{1}{462+462}=\frac{1}{924}.$

Et fic deinceps.

Et fic deinceps.

SCHOLIUM

SCHOLIUM.

Atque hic obiter incidimus in numerorum figuratorum (ut dici solent) speculationem insperatam. Sunt enim numeri omnes (tam hujus quam sequentis Tabellæ) hujusmodi additione facti, figurati; putà Laterales, Triangulares, Pyramidales, &c. Quod, cum sit cuivis obvium, monuisse sufficiat.

Patet etiam, (in utraque Tabella,) series numerorum sic inventorum transversas easdem plane esse atque erectas.

Ex dictis autem licet propositionum aliquot præcedentium summam (nempe de serie Æqualium serie radicum mulctata) in unam Tabellam conjicere quam sequenti propositioni subjungam. Nempe ----

PROP. CXXXII. *Theorema.*

SI exponatur infinita series Æqualium mulctata analoga serie Primanorum (vel si libet, subprimanorum, quod tantundem valet) Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. Residua ipsa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. eam rationem habebunt ad congruam seriem Æqualium, quam habet Unitas ad numeros in subjecta Tabella indicatos. Nempe

Seriei

Seriei Æqualium mulctatæ serie											
Subdecimanorum	Subnonanorum	Suboctavanorum	Subseptimanorũ	Subsextanorum	Subquintanorum	Subquartanorum	Subtertianorum	Subsecundanorũ	Subprimanorum	Nulla	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Æqualia
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Residua.
66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1	Quadrata.
286	220	165	120	84	56	35	20	10	4	1	Cubi.
1001	715	495	330	210	126	70	35	15	5	1	Biquadrat.
3003	2002	1287	792	462	252	126	56	21	6	1	Surdesol.
8008	5005	3003	1716	924	462	210	84	28	7	1	Sextana.
19448	11440	6435	3432	1716	792	330	120	36	8	1	Septimana
43758	24310	12870	6435	3003	1287	495	165	45	9	1	Octavana.
92378	48620	24310	11440	5005	2002	715	220	55	10	1	Nonana.
184756	92378	43758	19448	8008	3003	1001	286	66	11	1	Decimana.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Sequitur ex præcedente. Numerus autem Tabellæ quilibet intermedius est aggregatus ex duobus sibi proximis altero sursum altero ad dextram positis.

 Notandum

Notandũ etiam eſt, eundem prodire rationis conſequentem in reſiduorũ quadratis ſi auferantur ſubtertiana, & in Cubis ſi auferantur ſubſecundana; item in ſextanis ſi auferantur ſubſeptimana, & in ſeptimanis ſi auferantur ſubſextana; & ſic ubique reciprocatis quaſi poteſtatibus, ut ex inſpecta tabella patet.

Sed & etiam alias idem aliquando accidit, puta in Surdeſolidis ſi auferantur ſubprimana & in ipſis Reſiduis ſi auferantur ſubquintana, ſed & in Quadratis ſi auferantur ſubſecundana; Item in Nonanis ſi auferantur ſubprimana, & in ipſis Reſiduis ſi auferantur ſubnonana, ſed & in Cubis ſi auferantur ſubſecundana, & Quadratis ſi auferantur ſubtertiana: Item in Octavanis ſi auferantur ſubſextana, & ſextanis ſi auferantur ſuboctavana, ſed & in Decimanis ſi auferantur ſubquintana, & in Quintanis ſi auferantur ſubdecimana: & ſic alibi ut ex tabella patet.

PROP. CXXXIII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie ſecundanorum, Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta

Reſidua	Quadrata.	Cubi.
$aD - a^2$	$a^2D^2 - 2a^3D + a^4$	$a^3D^3 - 3a^4D^2 + 3a^5D - a^6$
$bD - b^2$	$b^2D^2 - 2b^3D + b^4$	$b^3D^3 - 3b^4D^2 + 3b^5D - b^6$
$cD - c^2$	$c^2D^2 - 2c^3D + c^4$	$c^3D^3 - 3c^4D^2 + 3c^5D - c^6$
&c usq: ad	&c usque ad	&c usque ad
$DD - D2$	$D^2D^2 - 2D^3D + D^4$	$D^3D^3 - 3D^4D^2 + 3D^5D - D^6$
$^2AD^2 - \frac{1}{3}AD^2$	$\frac{1}{3}AD^4 - \frac{2}{4}AD^4 + \frac{1}{5}AD^4$	$\frac{1}{4}AD^6 - \frac{3}{5}AD^6 + \frac{3}{6}AD^6 - \frac{1}{7}AD^6$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}AD^2$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}AD^4$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7} = \frac{6}{840} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2\times3} \times \frac{4}{4\times5} = \frac{1}{30}$	$\frac{1}{2\times3} \times \frac{4}{4\times5} \times \frac{9}{6\times7} = \frac{1}{140}$

Et ſic deinceps; continue multiplicando Numeratores per

numeros

numeros quadratos, & denominatores per binos continue sequentes arithmetice proportionales.

PROP. CXXXIV. *Corollarium.*

IDeoq; *Si series Æqualium mulctata serie Primanorum respective ducatur in seriem Primanorum; Rectangulorum (aut ipsis æqualium vel etiam proportionalium Quadratorum aut figurarum quarumvis) aggregatum, ad aggregatum totidem æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atq; idem accidet si Quadrata seriei illius in Quadrata hujus; Et cubi illius in cubos hujus, &c. respective ducantur.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. præced. Nam si ducatur

$$\begin{array}{l} D - a \\ \text{in} \quad a \\ \hline \text{fiet } aD - a^2 \\ \quad \&c. \end{array} \qquad \begin{array}{l} Q: D - a: = D^2 - 2aD + D^2 \\ \qquad\qquad \text{in} \quad a^2 \\ \hline a^2D^2 - 2a^3D + a \\ \quad \&c. \end{array} \qquad \begin{array}{l} C: D - a: = D^3 - 3aD^2 \times 3a^2D - a^3 \\ \qquad\qquad\qquad \text{in} \quad a^3 \\ \hline a^3D^3 - 3a^4D^2 + 3a^5D - a^6 \\ \quad \&c. \end{array}$$

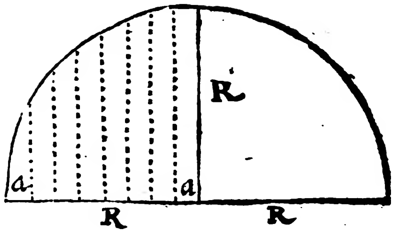
PROP. CXXXV. *Corollarium.*

IDeoq; *Semi-Circulus ad Quadratum Diametri (vel etiam Semi-Ellipsis ad Parallelogrammum Ellipsi circumscriptum) eam habet rationem quam habent Radices quadraticæ universales Residuorum seriei Primanorum serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem Primanorum illorum maximæ Æqualium, Totus itaq; circulus (aut Ellipsis) ad illud Quadratum (vel Parallelogrammum) rationem habebit illius duplam.*

Nam si diameter circuli (vel etiam ellipseos ponatur *D*,

Qq 2 (cu-

(cujus pars infinite parva $\frac{D}{\infty} = a$,) eique ordinatim-applicentur infinitæ rectæ (æqualiter ab invicem distantes) semicirculum (vel semi-ellipsen) complentes; erunt illæ (ut notum est) mediæ proportio-



nales (vel saltem in ellipsi mediis illis proportionalibus proportionales) inter diametri segmenta; Puta

inter	a	$2a$	$3a$	$4a$	&c.
&	$D - a$	$D - 2a$	$D - 3a$	$D - 4a$	
ideoq;	$\sqrt{:aD - a^2}$:	$\sqrt{:2aD - 4a^2}$:	$\sqrt{:3aD - 9a^2}$:	$\sqrt{:3aD - 16a^2}$	
vel	$\sqrt{:aD - a^2}$;	$\sqrt{:bD - b^2}$:	$\sqrt{:cD - c^2}$:	$\sqrt{:dD - d^2}$:	

Adeoque omnium aggregatum, hoc est semicirculus, (vel semi-ellipsis) ad totidem ipsi $\sqrt{D^2}$ æqualiū, puta ad quadratum Diametri (saltem ad diametrum in altitudinem ductum)

$$\text{ut } \frac{\sqrt{:aD - a^2:} + \sqrt{:bD - b^2:} + \sqrt{:cD - c^2:} + \&c. \text{ usq; ad } \sqrt{:DD - D^2},}{\sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} + \&c. = A\sqrt{D^2} = AD}$$

ad

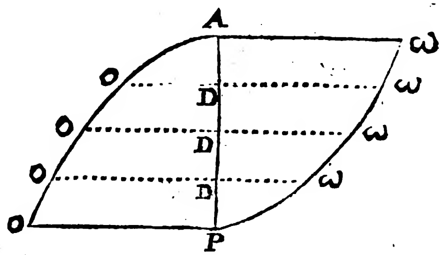
Ideoque circulus integer ad idem quadratum, ut $2\sqrt{:aD - a^2}$ &c. ad AD.

PROP. CXXXVI. *Corollarium.*

ET proinde, *Si supponamus semiparabolæ cujusvis infinitas rectas (ordinatim-applicatas) in ejusdem, inverso situ positæ, respectivas rectas duci; quod proveniit solidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum (vel ex Quadratis, aut aliis quidem figuris similibus, quæ rectangulis illis æquentur) erit ad æquè-altum Parallelepipedum congruum (nempe cujus basis æquentur Quadrato basis semiparabolæ) ut Semicirculus ad Quadratum*

dratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in Circulo vel Ellipsi.)

Sit eadem parabola APO situ directo, & PAω situ inverso posita: erunt igitur (ex natura Parabolæ) Quadrata ordinatim-applicatarum (nempe rectarum D O, D O, &c. descendendo; vel Dω, Dω, &c. ascendendo,) infinita series Primanorum; puta a, $2a$, $3a$ &c.



vel eorum loco, a, b, c, &c. quorum maximum dicatur D (nempe quadratum basis P O vel A ω:) Et propterea, eadem inverso situ erunt $D - a$, $D - 2a$, $D - 3a$, &c. vel etiam $D - a$, $D - b$, $D - c$, &c. (Æquale enim est singulorum incrementum, si a minimo ordiamur, atque decrementum, si ordiamur a maximo.) Et consequenter ipsæ ordinatim-applicatæ (quippe in quadratorum suorum ratione subduplicata,) illic quidem $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt{3a}$, &c. vel $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. hic autem $\sqrt{:D - a}$. $\sqrt{:D - 2a}$. $\sqrt{:D - 3a}$ &c. vel (eorum loco) $\sqrt{:D - a}$. $\sqrt{:D - b}$. $\sqrt{:D - c}$ &c. Ductis igitur his in illas, emergunt rectangula O D ω. Nempe

Ductis	$\sqrt{:D - a}$.	$\sqrt{:D - b}$	$\sqrt{:D - c}$	&c.
In	$\sqrt{a}$.	$\sqrt{b}$.	$\sqrt{c}$.	&c.
Fient	$\sqrt{:aD - a^2}$.	$\sqrt{:bD - b^2}$.	$\sqrt{:cD - c^2}$.	&c.

Horum autem rectangulorum omnium aggregatum, ad rectangulum $\sqrt{:D - 0}$. in $\sqrt{:D - 0}$, hoc est $\sqrt{D^2} = D$ toties positum: Hoc est, solidum ex illâ multiplicatione ortum, ad dictum Parallelepipedum: est ut semicirculus ad quadratum Diametri, per præcedentem.

Et propterea etiam mediæ proportionales inter contiguas re-

ctas OD, Dω, erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel ellipsi. quippe quia rectangula ODω sunt illis ordinatim applicatis proportionalia.

SCHOLIUM.

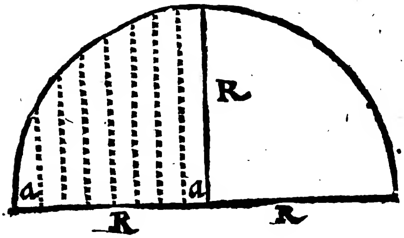
Nota tamen, non necessarium esse ut semi-parabola inverso situ posita sit plane eadem cum ea quæ ponitur situ directo: nam res non minus succedet in quibuslibet duabus semiparabolis inverso situ positis, modo æque altis. Ita tamen ut, si bases habeant inæquales, basis Parallelepipedi non sumatur, utriusvis Parabolarum basis quadrato, sed utriusq; rectangulo æqualis, puta P O $\times$ A ω. quod monuisse sufficiat, cum eadem quæ præcessit demonstratio, levi immutatione facta, etiam huc accommodari possit. Vel etiam hoc inde facile inferri possit.

Figura vero ex omnibus mediis proportionalibus (inter O D, D ω,) constans, erit quoddam Elliptoides: cujus nempe ordinatim applicatarum quadrata sunt ipsis ordinatim applicatis in ellipsi proportionalia, ut patet. Sicut nempe in paraboloide Biquadratico ordinatim-applicatarum quadrata sunt ordinatim applicatis in parabola proportionalia; Et quadrata ordinatim applicatarum in Parabola proportionalia ipsis in triangulo Ordinatim applicatis.

PROP. CXXXVII. *Corollarium.*

Item, *Sphæroides (vel etiam Conoides aut Pyramidoides Ellipticum,) ad Cylindrum (vel Prisma circumscriptum,) rationem habebunt eam quam habet quadruplum seriei Primanorum serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem totidem Æqualium maximo Primanorum. Nempe ut* 2 *ad* 3.

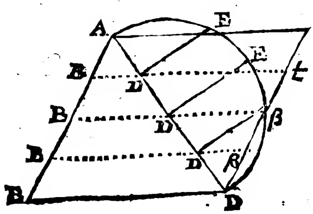
Cum



Cum enim rectæ in Circulo vel Ellipsi sint Duplum seriei $\sqrt{:}\, aD - a^2 :$ &c. Erunt plana in Conoide vel Pyramidoide ut Quadruplum ipsorum $aD - a^2$ &c. Ideoq; ad Prisma vel Cylindrum circumscriptum, ut 4 ad 6, vel 2 ad 3. Per prop. 133. Quod & antea ostensum erat prop. 123.

PROP. CXXXVIII. *Corollarium.*

ITem, *Si Parallelogrammum linea diagonali dividatur; rectæq; unius trianguli in continuas rectas alterius trianguli ducantur, mediæ proportionales erunt totidem (vel circuli, vel saltem) Ellipseos ordinatim applicatæ; earúmq; quadrata aut circuli (aut figuræ quæcunq; similes) Pyramidoidis aut conoidis Elliptici Plana.*



Sequitur ex duabus præced. Nam rectæ conterminæ sunt instar segmentorum Diametri. An autem circulus, an Ellipsis prodibit; judicandum erit eodem indicio, quo in prop. 124.

PROP. CXXXIX. *Theorema.*

SI exponatur series primanorum mulctata serie Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua

Refidua	Quadrata.	Cubi
$aD^2 - A^3$	$a^2 D^4 - 2a^4 D^2 + a^6$	$a^3 D^6 - 3a^5 D^4 + 3a^7 D^2 - a^9$
&c. ad	&c. usq; ad	&c usq; ad
$DD^2 - D^3$	$D^2 D^4 - 2D^4 D^2 + D^6$	$D^3 D^6 - 3D^5 D^4 + 3D^7 D^2 - D^9$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}AD^3$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105}AD^6$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{10} = \frac{48}{1920}AD^9$
vel $\frac{2}{2\times4}$	$\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$

Et fic deinceps; puta

$$\frac{2\times4\times6\times8\times10}{6\times8\times10\times12\times14\times16}. \quad \frac{2\times4\times6\times8\times10\times12}{7\times9\times11\times13\times15\times17\times19} \quad \&c.$$

PROP. CXL. *Coroll.*

IDem accidet, si feries Æqualium mulctata ferie Secundanorum, ducatur in feriem Primanorum. Et illius Quadrata, Cubi, &c. in Quadrata, Cubos &c. hujus.

(Puta, fi rectæ in femiparabola, diametro parallelæ, ducantur in rectas Parallelogrammi circumfcripti: nam earum continuationes, in complemento, funt feries Secundanorum.)

Quia nempe $D^2 - a^2$ in a eft $aD^2 - a^3$. &c.

PROP. CXLI. *Theorema.*

SI exponatur feries Primanorum mulctata ferie Quartanorum; Refiduorum Quadrata, Cubi, &c. ad feriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Refidua

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$aD^3 - a^4$ &c.	$a^2D^6 - 2a^5D^3 + a^8$ &c.	$a^3D^9 - 3a^6D^6 + 3a^9D^3 - a^{12}$ &c.
$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}AD^4$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{2}AD^8$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{7} + \frac{3}{10} - \frac{1}{12} = \frac{16}{420}AD^{12}$
vel $\frac{3}{2\times5}$	$\frac{3\times6}{3\times6\times9}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10\times12}$

Et sic deinceps, puta $\frac{3\times6\times9\times12}{5\times8\times11\times14\times17}$. $\frac{3\times6\times9\times12\times15}{6\times9\times12\times15\times18\times21}$. &c.

PROP. CXLII. *Coroll.*

Idem continget, si series Æqualium mulctata serie Tertianorum, ducatur in seriem Primanorum.

(Puta, si rectæ paraboloidis Cubicalis diametro Parallelæ, ducantur in rectas Trianguli inscripti: Nam earum continuationes in complemento, sunt series Tertianorum. Et similiter mutatis mutandis, in aliis propositionibus.)

Quia nempe $D^3 - a^3$ in a, est $aD^3 - a^4$.

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit, mutatis mutandis, in aliis quibusvis casibus, ubi series hujusmodi componitur ex duabus vel pluribus aliis seriebus invicem multiplicatis. ut patet.

PROP. CXLIII. *Theorema.*

Pariter, si exponatur series Primanorum mulctata serie Quintanorum, Sextanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $\frac{4}{2\times6}$. $\frac{4\times8}{3\times7\times11}$. $\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}$ $\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$ &c.

Item $\frac{5}{2\times7}$ $\frac{5\times10}{3\times8\times13}$ $\frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}$ $\frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$ &c.

 Et

Et sic deinces, ut potestas seriei ablatæ postulaverit: Prout inductione patebit. Ideoq; ----

PROP. CXLIV. *Theorema.*

SI exponatur series Primanorum mulctata serie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Residua ipsa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella: Sive, quam habent numeri Tabellæ, ad Unitatem. Nempe

Seriei Primanorum mulctatæ serie

	Residua	quadrata	Cubi	Biquadrata
Secundan.	$\frac{1}{2\times3}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{5\times6\times7\times8\times9}$
Tertianor.	$\frac{2}{2\times4}$	$\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$
Quartan.	$\frac{3}{2\times5}$	$\frac{3\times6}{3\times6\times9}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{5\times8\times11\times14\times17}$
Quintan.	$\frac{4}{2\times6}$	$\frac{4\times8}{3\times7\times11}$	$\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$
Sextanor.	$\frac{5}{2\times7}$	$\frac{5\times10}{3\times8\times13}$	$\frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$
Septiman.	$\frac{6}{2\times8}$	$\frac{6\times12}{3\times9\times15}$	$\frac{6\times12\times18}{4\times10\times16\times22}$	$\frac{6\times12\times18\times24}{5\times11\times17\times23\times29}$
Octavan.	$\frac{7}{2\times9}$	$\frac{7\times14}{3\times10\times17}$	$\frac{7\times14\times21}{3\times11\times18\times25}$	$\frac{7\times14\times21\times28}{5\times12\times19\times26\times33}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP.

PROP. CXLV. *Theorema.*

S*Imiliter*, si exponatur series Secundanorum mulctata serie Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c; Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Seriei Secundanorum mulctatæ serie	Residua	Quadrata.	Cubi	Biquadrata.
Tertian.	$\frac{1}{3\times4}$	$\frac{1\times2}{5\times6\times7}$	$\frac{1\times2\times3}{7\times8\times9\times10}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{9\times10\times11\times12\times13}$
Quart.	$\frac{2}{3\times5}$	$\frac{2\times4}{5\times7\times9}$	$\frac{2\times4\times6}{7\times9\times11\times13}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{9\times11\times13\times15\times17}$
Quintan.	$\frac{3}{3\times6}$	$\frac{3\times6}{5\times8\times11}$	$\frac{3\times6\times9}{7\times10\times13\times16}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{9\times12\times15\times18\times21}$
Sextan.	$\frac{4}{3\times7}$	$\frac{4\times8}{5\times9\times13}$	$\frac{4\times8\times12}{7\times11\times15\times19}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{9\times13\times17\times21\times25}$
Septim.	$\frac{5}{3\times8}$	$\frac{5\times10}{5\times10\times15}$	$\frac{5\times10\times15}{7\times12\times17\times22}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{9\times14\times19\times24\times29}$
Octav.	$\frac{6}{3\times9}$	$\frac{6\times12}{5\times11\times17}$	$\frac{6\times12\times18}{7\times13\times19\times25}$	$\frac{6\times12\times18\times24}{9\times15\times21\times27\times33}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CXLVI. *Theorema.*

I*Tem*, Si exponatur series Tertianorum mulctata serie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c.

Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Seriei Tertianorum mulctatæ serie

	Res	Quadr.	Cubi.	Biquadrata.
Quartanorum	$\frac{1}{4\times5}$	$\frac{1\times2}{7\times8\times9}$	$\frac{1\times2\times3}{10\times11\times12\times13}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{13\times14\times15\times16\times17}$
quintanorum	$\frac{2}{4\times6}$	$\frac{2\times4}{7\times9\times11}$	$\frac{2\times4\times6}{10\times12\times14\times16}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{13\times15\times17\times19\times21}$
Sextanorum	$\frac{3}{4\times7}$	$\frac{3\times6}{7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9}{10\times13\times16\times19}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{13\times16\times19\times22\times25}$
Septimanorũ	$\frac{4}{4\times8}$	$\frac{4\times8}{7\times11\times15}$	$\frac{4\times8\times12}{10\times14\times18\times22}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{13\times17\times21\times25\times29}$
Octavanorum	$\frac{5}{4\times9}$	$\frac{5\times10}{7\times12\times17}$	$\frac{5\times10\times15}{10\times15\times20\times25}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{13\times18\times23\times28\times33}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo facile erit vel has Tabellas quousq; libet continuare, vel alias etiam pro seriebus sequentibus componere; puta Seriebus Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. mulctatis seriebus quibuslibet superioris potestatis.

PROP.

PROP. CXLVII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Primanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium rationem habebunt cognitam.

Nempe eam quæ exhibetur prop. 153. Puta

Reſidua.	Quadrata	Cubi.
$\sqrt{aD} - \sqrt{a^2}$	$\sqrt{a^2D^2} - 2\sqrt{a^3D} + \sqrt{a^4}$	$\sqrt{a^3D^3} - 3\sqrt{a^4D^2} + 3\sqrt{a^5D} - \sqrt{a^6}$
&c. ad	&c uſq; ad	&c. uſq; ad
$\sqrt{DD} - \sqrt{D^2}$	$\sqrt{D^2D^2} - 2\sqrt{D^3D} + \sqrt{D^4}$	$\sqrt{D^3D^3} - 3\sqrt{D^4D^2} + 3\sqrt{D^5D} - \sqrt{D^6}$
$\frac{2}{3}A\sqrt{D^2} - \frac{2}{4}A\sqrt{D^2}$	$\frac{2}{4}A\sqrt{D^4} - \frac{4}{5}A\sqrt{D^4} + \frac{2}{6}AD^2$	$\frac{2}{5}AD^3 - \frac{6}{6}AD^3 + \frac{6}{7}AD^3 - \frac{2}{8}AD^3$
$\frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{5} + \frac{2}{6} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{6} + \frac{6}{7} - \frac{2}{8} = \frac{12}{1680} = \frac{1}{140}$
$\frac{2}{3 \times 4} = \frac{1}{2 \times 3}$	$\frac{2 \times 2}{4 \times 5 \times 6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 4 \times 5}$	$\frac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 6 \times 7 \times 8} = \frac{1 \times 2 \times 3}{4 \times 5 \times 6 \times 7}$

PROP. CXLVIII. *Corollar.*

IDem continget ſi ſeries Æqualium mulctata ſerie Subſecundanorum, ducatur in ſeriem Subſecundanorum.

(Puta ſi ordinatim applicatæ in ſemi-parabola ducantur in earundem continuationes in ipſius complemento.) Nam $\sqrt{D} - \sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ facit $\sqrt{aD} - \sqrt{a^2} = \sqrt{aD} - a$. &c. Et facta ab eorum quadratis, æquantur quadratis horum &c.

PROP.

PROP. CXLIX. *Corollarium.*

Patet etiam; Easdem provenire rationes, sive exponatur series $a - a^2$ &c, sive series $\sqrt{a} - \sqrt{a^2}$ &c. (vel $\sqrt{a} - a$:)

Nempe, collatis Prop. 133. & 146.

SCHOLIUM.

Ideoque & reliqua quæ post Prop. 133. habentur Corollaria, huc etiam (mutatis mutandis) non difficulter transferri possent. quod monuisse sufficiat.

PROP. CL. *Theorema.*

Si exponatur series Subsecundanorum mulctata Serie Radicum quadraticarum Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{a}D^2 - \sqrt{a^3}$ &c.	$\sqrt{a^2}D^4 - 2\sqrt{a^4}D^2 + \sqrt{a^6}$ &c.	$\sqrt{a^3}D^6 - 3\sqrt{a^5}D^4 + 3\sqrt{a^7}D^2 - \sqrt{a^2}$ &c.
$\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{6} + \frac{2}{8} = \frac{16}{192} = \frac{1}{12}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{7} + \frac{6}{9} - \frac{2}{11} = \frac{96}{3465}$
$\frac{4}{3 \times 5} A\sqrt{D^3}$	$\frac{4 \times 4}{4 \times 6 \times 8} A\sqrt{D^6}$	$\frac{4 \times 4 \times 6}{5 \times 7 \times 9 \times 11} A\sqrt{D^2}$

PROP. CLI. *Coroll.*

Idem continget, si series Æqualium mulctata serie Primanorum, ducatur in seriem Subsecundanorum.

Quia $D - a$ vel $\sqrt{D^2} - \sqrt{a^2}$ in $\sqrt{a}$, facit $D\sqrt{a} - a\sqrt{a}$, vel $\sqrt{a}D^2 - \sqrt{a^3}$.

SCHOLIUM.

Et similiter etiam alibi intelligendum est, ubi series exposita dividi possit, in duas vel plures componentes.

PROP.

PROP. CLII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Secundanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Reſidua.	quadrata.	Cubi.
$\sqrt{aD^3} - \sqrt{a^4}$ &c.	$\sqrt{a^2D^6} - 2\sqrt{a^5D^3} + \sqrt{a^8}$ &c.	$\sqrt{a^3D^9} - 3\sqrt{a^6D^6} + 3\sqrt{a^9D^3} - \sqrt{a^{12}}$ &c.
$\frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{7} + \frac{2}{10} = \frac{36}{280} = \frac{9}{70}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{8} + \frac{6}{11} - \frac{2}{14} = \frac{324}{6160} = \frac{81}{1540}$
$\frac{6}{3 \times 6}$	$\frac{6 \times 6}{4 \times 7 \times 10}$	$\frac{6 \times 6 \times 9}{5 \times 8 \times 11 \times 14}$

Et ſic deinceps. Et ſimiliter in ſubductione ſeriei cujuſvis poteſtatis ſuperioris. Adeoq; ----

PROP. CLIII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum quadraticarum Tertianorum, Quintanorum, &c. Reſidua ipſa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Seriei Subsecundanorum mulctatæ serie

	Residua	Quadrata	Cubi	Biquadrata
Primanor.	$\frac{2}{3\times4}$	$\frac{2\times2}{4\times5\times6}$	$\frac{2\times2\times3}{5\times6\times7\times8}$	$\frac{2\times2\times3\times4}{6\times7\times8\times9\times10}$
√Tertian.	$\frac{4}{3\times5}$	$\frac{4\times4}{4\times6\times8}$	$\frac{4\times4\times6}{5\times7\times9\times11}$	$\frac{4\times4\times6\times8}{6\times8\times10\times12\times14}$
Secundan.	$\frac{6}{3\times6}$	$\frac{6\times6}{4\times7\times10}$	$\frac{6\times6\times9}{5\times8\times11\times14}$	$\frac{6\times6\times9\times12}{6\times9\times12\times15\times18}$
√Quintan.	$\frac{8}{3\times7}$	$\frac{8\times8}{4\times8\times12}$	$\frac{8\times8\times12}{5\times9\times13\times17}$	$\frac{8\times8\times12\times16}{6\times10\times14\times18\times22}$
Tertianor.	$\frac{10}{3\times8}$	$\frac{10\times10}{4\times9\times14}$	$\frac{10\times10\times15}{5\times10\times15\times20}$	$\frac{10\times10\times15\times20}{6\times11\times16\times21\times26}$
√Septim.	$\frac{12}{3\times9}$	$\frac{12\times12}{4\times10\times16}$	$\frac{12\times12\times18}{5\times11\times17\times23}$	$\frac{12\times12\times18\times24}{6\times12\times18\times24\times30}$
Quartan.	$\frac{14}{3\times10}$	$\frac{14\times14}{4\times11\times18}$	$\frac{14\times14\times21}{5\times12\times19\times26}$	$\frac{14\times14\times21\times28}{6\times13\times20\times27\times34}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CLIV. *Theorema.*

Pariter, Si exponatur series Subtertianorum mulctata serie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum cubicarum Secundanorum, Quartanorum, Quintanorum, Septimanorum, &c. Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio

Ratio quam habent ad seriem Æqualium.

Seriei Subtertianorum mulctatæ ſerie

	Reſidua	Quadr.	Cubi	Biquadrata
√c. Secun.	$\frac{3}{4\times5}$	$\frac{3\times2}{5\times6\times7}$	$\frac{3\times2\times3}{6\times7\times8\times9}$	$\frac{3\times2\times3\times4}{7\times8\times9\times10\times11}$
Primanor.	$\frac{6}{4\times6}$	$\frac{6\times4}{5\times7\times9}$	$\frac{6\times4\times6}{6\times8\times10\times12}$	$\frac{6\times4\times6\times8}{7\times9\times11\times13\times15}$
√c. Quart.	$\frac{9}{4\times7}$	$\frac{9\times6}{5\times8\times11}$	$\frac{9\times6\times9}{6\times9\times12\times15}$	$\frac{9\times6\times9\times12}{7\times10\times13\times16\times19}$
√c. Quint.	$\frac{12}{4\times8}$	$\frac{12\times8}{5\times9\times13}$	$\frac{12\times8\times12}{6\times10\times14\times18}$	$\frac{12\times8\times12\times16}{7\times11\times15\times19\times23}$
Secundan.	$\frac{15}{4\times9}$	$\frac{15\times10}{5\times10\times15}$	$\frac{15\times10\times15}{6\times11\times16\times21}$	$\frac{15\times10\times15\times20}{7\times12\times17\times22\times27}$
√c. Septi.	$\frac{18}{4\times10}$	$\frac{18\times12}{5\times11\times17}$	$\frac{18\times12\times18}{6\times12\times18\times24}$	$\frac{18\times12\times18\times24}{7\times13\times19\times25\times31}$
√c. Octav.	$\frac{21}{4\times11}$	$\frac{21\times14}{5\times12\times19}$	$\frac{21\times14\times21}{6\times13\times20\times27}$	$\frac{21\times14\times21\times28}{7\times14\times21\times28\times35}$
Tertianor.	$\frac{24}{4\times12}$	$\frac{24\times16}{5\times13\times2}$[illegible]	$\frac{24\times16\times24}{6\times14\times22\times30}$	$\frac{24\times16\times24\times32}{7\times15\times23\times31\times39}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Et ſimili methodo non erit difficile & has Tabellas quouſque libet & continuare & alias etiam pro ſeriebus aliis componere; puta ſeriebus ſubquartanorum, ſubquintanorum, &c. (aut quidem radicum quadraticarum ſubtertianorum, ſubquintanorum, &c. vel radicum cubicarum ſubſecundanorum, ſubquartanorum &c. aut aliarum ſimilium,) mulctatis ſeriebus quibuſlibet ſuperioris poteſtatis.

 Sed

Sed & facile est has Tabellas (aliasque similiter condendas) interpolare, saltem quoad altitudinem, interponendo series transversas quotlibet, ut ex ipsa Tabellarum progressione rite considerata patebit.

Verbi gratia, in Tabella Prop. 144. Si series primanorum mulctetur serie Radicum quadraticarum quintanorum, interponenda erit huic ablationi conveniens series alia transversa inter primam & secundam istius Tabellæ (quia nempe Radices quadraticæ Quintanorum, quarum index est $\frac{5}{2}$, vel $2\frac{1}{2}$, medium locum habent inter secundana & tertiana, quorum indices 2 & 3;) eritque series illa.

	Residua.	Quad.	Cubi.	Biquad
	$\frac{1\frac{1}{2}}{2\times 3\frac{1}{2}}$	$\frac{1\frac{1}{2}\times 3}{3\times 4\frac{1}{2}\times 6}$	$\frac{1\frac{1}{2}\times 3\times 4\frac{1}{2}}{4\times 5\frac{1}{2}\times 7\times 8\frac{1}{2}}$	$\frac{1\frac{1}{2}\times 3\times 4\frac{1}{2}\times 6}{5\times 6\frac{1}{2}\times 8\times 9\frac{1}{2}\times 11}$
vel	$\frac{3}{2\times 7}$	$\frac{3\times 6}{3\times 9\times 12}$	$\frac{3\times 6\times 9}{4\times 11\times 14\times 17}$	$\frac{3\times 6\times 9\times 12}{5\times 13\times 16\times 19\times 22}$
vel	$\frac{6}{4\times 7}$	$\frac{6\times 6}{6\times 9\times 12}$	$\frac{6\times 6\times 9}{8\times 11\times 14\times 17}$	$\frac{6\times 6\times 9\times 12}{10\times 13\times 16\times 19\times 22}$

Atque idem etiam in aliis Tabellis præstare non erit difficile, si processui cujusvis Tabellæ attendatur.

At quo pacto licebit easdem Tabellas interpolare quoad latitudinem, seriebus scilicet erectis alias interponendo; (puta radicum universalium Residuorum, Radicum quadraticarum Cuborum, &c. vel Radicum cubicarum Residuorum, quadratorum, Biquadratorum, &c. vel similium;) non adeo facilis est labor, si quidem possibilis. Illud autem deinceps, quoad potero, conabor, & quidem aliquousque præstabo, licet illud universaliter efficere vix spondere ausim.

Interim de seriebus auctis aliqua dicenda sunt, ne videar eas penitus omittere; sed breviter, ne sim tædio.

PROP.

PROP. CLV. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Primanorum; Aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$R+a$	$R^2+2aR+a^2$	$R^3+3aR^2+3a^2R+a^3$
&c. ad	&c. usq; ad	&c. usq; ad
$R+R$	$R^2+2RR+R^2$	$R^3\ 3RR^2+3R^2R+R^3$
$AR+\frac{1}{2}AR$	$AR^2+\frac{2}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2$	$AR^3+\frac{3}{2}AR^3+\frac{3}{3}AR^3+\frac{1}{4}AR^3$
$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$1+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	$1+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

Ubi numerator quilibet conflat ex præcedentis duplo unitate aucto: Denominator ex præcedente unitate aucto.

PROP. CLVI. *Corollarium.*

IDeoq;, *Si Trapezio (ex Parallelogrammo & Triangulo, æqualium basium & altitudinum, conflato) aptetur Conoides (vel Pyramidoides) truncatum (sive conversione circa axem, sive aliàs;) erit illud ad Cylindrum vel Prisma inscriptum, ut* $\frac{7}{3}$ *ad* 1, *vel, ut* 7 *ad* 3:

Nempe ut quadrata seriei Æqualium serie Primanorum auctæ, ad seriem Æqualium.

Sin Parrallelogrammi & Trianguli basis sint inæquales moderamen adhibendum est.

PROP. CLVII. *Corollarium.*

SI autem *Conoides vel Pyramidoides illud Cylindricè vel Prismaticè excavetur; residuum erit (ad exem-*

tum Cylindrum vel Prisma maximum inscriptum) *ut* 4 *ad* 3.

Nempe ut $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ ad 1.

PROP. CLVIII. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Secundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta, si Parallelogrammum complemento Semiparabolæ augeatur.)

Nempe, pro quovis termino seriei primanorum posito a (ad abbreviandam operationem) & propterea pro quovis termino secundanorum a^2, &c. Erunt

Aggregata	Quadrata.	Cubi.
$R^2 + a^2$ &c.	$R^4 + 2a^2R + a^4$ &c.	$R^6 + 3a^2R^4 + 3a^4R^2 + a^6$ &c.
$1AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$	$1AR^4 + \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$1AR^6 + \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$
$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15}$	$1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{288}{105}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si series Æqualium augeatur serie Tertianorum, Quartanorum, &c. Ut patet.

PROP. CLIX. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Subsecundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta si Parallelogrammum augeatur semiparabolâ.) Nempe

Aggregata

Aggregata	Quadrata	Cubi
$\sqrt{R}+\sqrt{a}$ &c.	$\sqrt{R^2}+2\sqrt{aR}+\sqrt{a^2}$ &c.	$\sqrt{R^3}+3\sqrt{aR^2}+3\sqrt{a^2R}+\sqrt{a^3}$ &c.
$A\sqrt{R}+\frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$A\sqrt{R^2}+\frac{4}{3}A\sqrt{R^2}+\frac{2}{4}A\sqrt{R^2}$	$A\sqrt{R^3}+\frac{6}{3}A\sqrt{R^3}+\frac{6}{4}A\sqrt{R^3}+\frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$
$\frac{1}{1}+\frac{2}{3}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$	$\frac{2}{2}+\frac{4}{3}+\frac{2}{4}=\frac{68}{24}=\frac{17}{6}$	$\frac{2}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{2}{5}=\frac{588}{120}=\frac{49}{10}$

PROP. CLX. *Theorema.*

SI series Æqualium augeatur serie Subtertianorum; Aggregata, eorúmq; Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

(Puta, si Parallelogrammum augeatur semiparaboloide Cubicali,) Nempe.

Aggregata	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{a}$ &c.	$\sqrt[3]{R^2}+2\sqrt[3]{aR}+\sqrt[3]{a^2}$ &c.	$\sqrt[3]{R^3}+3\sqrt[3]{aR^2}+3\sqrt[3]{a^2R}+\sqrt[3]{a^3}$ &c.
$1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$	$1+\frac{6}{4}+\frac{3}{5}=\frac{31}{10}$	$1+\frac{9}{4}+\frac{9}{5}+\frac{3}{6}=\frac{111}{20}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si exponatur series Æqualium aucta serie subquartanorum, subquintanorum, &c. vel etiam serie radicum quadraticarum Cuborum, Surdesolidorum, &c. vel radicum cubicarum Secundanorum, Quartanorum, &c. Et pariter in aliis.

PROP. CLXI. *Theorema.*

PAriter, si series Primanorum augeatur serie Secundanorum; Aggregata, eorúmq; Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Aggregata	Quadrata.	Cubi.
$aR+a^2$ &c.	$a^2R^2+2a^3R+a^4$ &c.	$a^3R^3+3a^4R^2+3a^5R+a^6$ &c.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}AR^2$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}AR^4$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{1}{7}=\frac{209}{140}AR^6$

SCHOL.

SCHOLIUM.

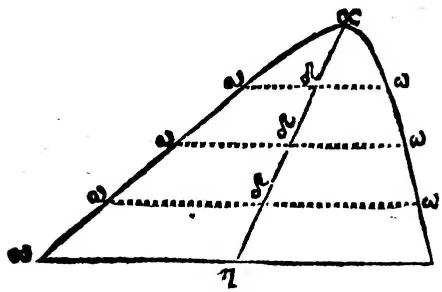
Et pari modo procedendum erit, si exponatur series primanorum (vel etiam Secundanorum, Tertianorum, &c.) aucta serie quâlibet alia, ut non sit opus hisce diutius immorari.

PROP. CLXII. *Corollarium.*

IDeoq; , *Conoides vel Pyramidoides Hyperbolicum, ad semissem Cylindri vel Prismatis circumscripti, est ut 5 ad 6: ad totum vero, ut 5 ad 12.*

Intellige, si tam transversa diameter, quam diameter intercepta maxima, ponatur æqualis lateri recto: secus enim adhibenda erit moderatio.

Nam, si ponatur Hyperbolæ latus rectum l vel R, transversa diameter $t = l$, & diameter intercepta d, erunt quadrata ordinatim-applicatarum $dl + \frac{d}{t}dl$ (per prop. 33. Con. Sect.) vel (propter $t = l$) $dl + d^2$. Et propterea (cum sit l vel R, certa quantitas, & d mutabilis & quidem altitudini proportionalis, pro qua igitur substitui potest a, b, c, &c.) erunt omnium quadrata (adeoq; & plana Conoidis vel Pyramidoidis) series infinita Primanorum aucta serie Secundanorum; puta $aR + a^2$, $bR + b^2$, $cR + c^2$, &c. usq; ad $R^2 + R^2$. Adeoq; series illa ad semissem seriei totidem maximo ($R^2 + R^2 = 2R^2$) æqualium (puta ad AR^2) erit ut 5 ad 6, per præced. Et propterea ad integram illam seriem æqualium, ut 5 ad 12. Quod erat propositum.



SCHOL.

SCHOLIUM.

Idem tamen eveniet, si saltem sumatur Diameter-intercepta maxima æqualis Diametro-Transversæ. Ut colligi poterit ex propositione sequente.

PROP. CLXIII. *Corollarium.*

SI autem non adsit limitatio prop. præced. Erit ratio Conoidis vel Pyramidoidis ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, utut non eadem quæ illic innuitur, cognita tamen.

Cum enim, utcunq;, quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbola sit $dl + \frac{dd}{t}l$, vel $dL + \frac{dd}{T}L$, vel $\frac{dT+dd}{T}L$, si pro diametris interceptis, d, d, &c. ponantur successive a, b, c, &c. sitq; omnium maxima D, adeoq; quadratum ordinatim-applicatæ maximæ $\frac{DT+DD}{T}L$. Erunt omnia $aT + bT + cT$ (&c. usq; ad DT) $= \frac{1}{2}ADT$; & omnia $a^2 + b^2 + c^2$ (&c. ad D^2) $= \frac{1}{3}AD^2$; quorum aggregatum $\frac{1}{2}ADT + AD^2$ si ducatur in L, & factum illud dividatur per T; prodibit $\frac{\frac{1}{2}ADT + \frac{1}{3}AD^2}{T}L$, vel etiam $\frac{\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}D}{T}ADL$: vel deniq; $\frac{3T+2D}{6T}ADL$: Quam autem habet rationem $\frac{3T+2D}{6T}ADL$, aggregatum quadratorum omnium ordinatim-applicatarum; ad $\frac{DT+D^2}{T}AL$ vel $\frac{T+D}{T}ADL$, aggregatum totidem Quadrato maximæ æqualium: eam habet Conoides vel Pyramidoides illud, ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, (propter plana quadratis illis proportionalia;) nempe, ut $\frac{3T+2D}{6T}$, ad $\frac{T+D}{T}$, vel, ut $3T+2D$ ad $6T+6D$. vel, ut $\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}D$ ad $T+D$. Adeoq; ----

PROP.

PROP. CLXIV. *Coroll.*

UT semissis Diametri Transversæ auctus triente Diametri Interceptæ, ad Transversæ & Interceptæ aggregatum; seu, ut Triplum Transversæ simul cum Duplo Interceptæ, ad simul utriusq; sextuplum: sic est Conoides vel Pyramidoides Hyperbolicum, ad Cylindrum vel Prisma (super eadem basi) circumscriptum.

Patet ex præcedente.

PROP. CLXV. *Corollarium.*

ITem, Hyperbola ad Parallelogrammum circumscriptum, est ut Series Radicum universalium seriei Primanorum serie Secundanorum respectivè auctæ, ad seriem totidem Radicum maximæ æqualium.

Nempe si adsit limitatio prop. 162, ut $\sqrt{:}\ aR+a^2: +\sqrt{:}\ bR+b^2: +\sqrt{:}\ cR+c^2:$ &c. (usq; ad $\sqrt{:}R^2+R^2:$) ad $A\sqrt{:}\ R^2+R^2: = A\sqrt{2R^2} = AR\sqrt{2}$. Hoc est, ut omnes ordinatim-applicatæ ad maximam toties positam.

Si verò illa limitatio non adsit; saltem erit ut $\sqrt{:}\ \frac{aT+a^2}{T}L: +\sqrt{:}\ \frac{bT+b^2}{T}L: +\sqrt{:}\ \frac{cT+c^2}{T}L:$ &c. (usq; ad $\sqrt{:}\ \frac{DT+D^2}{T}L:$) ad $A\sqrt{:}\ \frac{DT+D^2}{T}L:$ Hoc est, (dividendo omnia per $\sqrt{L}$ & multiplicando in $\sqrt{T}$) ut $\sqrt{:}\ aT+a^2. +\sqrt{:}\ bT+b^2: \sqrt{:}cT+c^2$ &c. (usq; ad $\sqrt{:}\ DT+D^2:$) ad $A\sqrt{:}\ DT+D^2:$ ut patet ex demonstratione prop. 163.

SCHOLIUM.

At quo pacto tandem ratio aggregati radicum illarum universalium, ad aggregatum totidem maximæ æqualium, numeris explicari poterit, non ita facile ostendetur.

Adeoq; & hic incidimus in eandem difficultatem in quadratura Hyperbolæ, quam supra aliquoties meminimus de quadratura

dratura Circuli vel Ellipseos, (aliarumq; aliquot curvarum:) nempe ut inquiratur jam ratio quam habet infinita series Radicum universalium Binomiorum, sicut illic Apotomarum.

Et quidem aliquando proclivis eram ut crederem rem planè impossibilem esse ut Radices surdæ numero infinitæ & invicem incommensurabiles ita in unum aggregatum coire possint ut illud, ad expositam aliquam quantitatem rationalem, rationem habent explicabilem.

Atq; hoc quidem eo magis adhuc confirmatum esse videbatur, quoniam ejusmodi series finita ad seriem totidem maximæ æqualium vix aliam passa est rationis explicationē quam omnes sigillatim repetendo, raro enim duæ vel plures occurrunt commensurabiles quæ in unam additione colligi possint.

Verbi gratia, si ponatur circuli radius partium 6 sinus recti in Quadrante singulis partium istarum terminis insistentes, erunt, $\sqrt{36-0}+\sqrt{36-1}+\sqrt{36-4}+\sqrt{36-9}+\sqrt{36-16}+\sqrt{36-25}+\sqrt{36-36}$: (per ea quæ dicta sunt ad pr. 121.) vel quod eodem recidit, $\sqrt{36}+\sqrt{35}+\sqrt{32}+\sqrt{27}+\sqrt{20}+\sqrt{11}+\sqrt{0}$; vel, ut irrationalitas ad minimos terminos reducatur, $6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0$: Ratio igitur quam habet illud radicum aggregatum ad radicem maximam toties positam, puta $7\sqrt{36-0}$: vel $7\sqrt{36}$ vel 7×6 hoc est 42; non explicatius efferri potest quam $\dfrac{6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0}{42}$.

Atq; ea est ratio quam habent illi sinus recti in Quadrante ad totidem rectas radio æquales & parallelas in Quadrato circumscripto.

Pariter, si ponatur radius partium 10; erunt sinus recti $\sqrt{100-0}+\sqrt{100-1}+\sqrt{100-4}+\sqrt{100-9}+\sqrt{100-16}+\sqrt{100-25}+\sqrt{100-36}+\sqrt{100-49}+\sqrt{100-64}+\sqrt{100-81}+\sqrt{100-100}$: Hoc est $\sqrt{100}+\sqrt{99}+\sqrt{96}+\sqrt{91}+\sqrt{84}+\sqrt{75}+\sqrt{64}+\sqrt{51}+\sqrt{36}+\sqrt{19}+\sqrt{0}$. Vel etiam $10+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+8+\sqrt{51}+6+\sqrt{19}+0$. quod aggregatum non aliter abbreviari potest quam pro $10+8+6+0$ substituendo 24; ut ratio istius aggregati ad radicem maximam toties positam, puta ad $11\sqrt{100}$ vel 11×10 vel 110, non explicatius efferri potest quam $\dfrac{24+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+\sqrt{51}+\sqrt{19}}{110}$;

quæ minus adhuc videtur intelligibilis quam ubi ponitur radius partium pauciorum, puta 6.

Atq; eodem modo quo plures supponuntur radii partes eò intricatior necesse est ut fiat rationis explicatio; quæ quidem fere omnium radicum repetitionem postulet, cum paucæ admodum, raro quidem, & non nisi fortuitò quasi, occurrunt, quæ vel rationales sint vel quidem invicem commensurabiles. Et propterea si supponatur Radius partium infinitarum, ratio proveniens etiam minus adhuc videatur explicabilis.

Idem contingeret, si, juxta tenorem prop. 135. ponatur circuli Diameter partium 12. Ita enim essent Sinus recti correspondentes in Semicirculo, $\surd:0\times12-0:+\surd:1\times12-1:+\surd:2\times12-4:+\surd:3\times12-9:+\surd:4\times12-16:+\surd:5\times12-25:+\surd:6\times12-36:+\surd:7\times12-49:+\surd:8\times12-64:+\surd:9\times12-81:+\surd:10\times12-100:+\surd:11\times12-121:+\surd:12\times12-144$. Hoc est $\surd:0-0:+\surd:12-1:+\surd:24-4:+\surd:36-9:+\surd:48-16:+\surd:60-25:+\surd:72-36:+\surd:84-49:+\surd:96-64:+\surd:108-81:+\surd:120-100:+\surd:132-121:+\surd:144-144$. Hoc est $\surd0+\surd11+\surd20+\surd27+\surd32+\surd35+\surd36+\surd35+\surd32+\surd27+\surd20+\surd11+\surd0$. Vel propter easdem radices bis positas, $2\surd0+2\surd11+2\surd20+2\surd27+2\surd32+2\surd35+\surd36$ Vel, reducendo irrationalitatem ad minimos terminos, $0+2\surd11+4\surd5+6\surd3+8\surd2+2\surd35+6$. Ratio igitur quam habet hoc aggregatum ad totidem radices maximæ æquales, puta ad $13\surd36$ vel 13×6, hoc est. ad 78, non explicatius efferri poterit quam $\frac{2\surd11+4\surd5+6\surd3+8\surd2+2\surd35+6}{78}$, vel $\frac{\surd11+2\surd5+3\surd3+4\surd2+\surd35+3}{39}$. Atq; ea est ratio quam habet aggregatum istorum Sinuum rectorum in Semicirculo, ad totidem rectas radio æquales & parallelas in Parallelogrammo huic semicirculo circumscripto. Si autem sinus maximus $\surd36=6$ supponatur bis poni (pro utroq; scilicet quadrante semel) atq; eapropter pro 13 æqualibus, ponantur 14; (puta, pro $13\times6=78$ ponatur $14\times6=84$;) eadem erit hæc ratio cum ea quam supra provenire diximus posito radio partium sex.

Pariter, si Diameter ponatur partium 20; sinus recti in Semicirculo erunt $\surd:0\times20-0:+\surd:1\times20-1:+\surd:2\times20-4:$

$+\surd$

$+\sqrt{:3\times20-9:}+\sqrt{:4\times20-16:}+\sqrt{:5\times20-25:}+\sqrt{:6\times20-36:}+\sqrt{:7\times20-49:}+\sqrt{:8\times20-64}+\sqrt{:9\times20-81:}+\sqrt{:10\times20-100:}+\sqrt{:11\times20-121}+\sqrt{:12\times20-144:}+\sqrt{:13\times20-169:}+\sqrt{:14\times20-196:}+\sqrt{:15\times20-225:}+\sqrt{:16\times20-256:}+\sqrt{:17\times20-289:}+\sqrt{:18\times20-324:}+\sqrt{:19\times20-361:}+\sqrt{:20\times20-400}$. Hoc est $\sqrt{0}+\sqrt{19}+\sqrt{36}+\sqrt{51}+\sqrt{64}+\sqrt{75}+\sqrt{84}+\sqrt{91}+\sqrt{96}+\sqrt{99}+\sqrt{100}+\sqrt{99}+\sqrt{96}+\sqrt{91}+\sqrt{84}+\sqrt{75}+\sqrt{64}+\sqrt{51}+\sqrt{36}+\sqrt{19}+\sqrt{0}$ Vel $2\sqrt{0}+2\sqrt{19}+2\sqrt{36}+2\sqrt{51}+2\sqrt{64}+2\sqrt{75}+2\sqrt{84}+2\sqrt{91}+2\sqrt{96}+2\sqrt{99}+\sqrt{100}$. (Nempe iidem ipsi qui supra in quadrante habentur posito radio partium 10, bis hic positi; nisi quod sinus maximus utriq; quadranti communis non repetatur.) Vel etiam $0+2\sqrt{19}+12+2\sqrt{51}+16+10\sqrt{3}+4\sqrt{21}+2\sqrt{91}+8\sqrt{6}+6\sqrt{11}+10$. Vel deniq; (quia $0+12+16+10=38$) $38+2\sqrt{19}+2\sqrt{51}+10\sqrt{3}+4\sqrt{21}+2\sqrt{91}+8\sqrt{6}+6\sqrt{11}$. Adeoq; ratio quam habet aggregatum illud radicum, ad maximam toties positam, (puta $21\times10=210$)

$$\text{est } \frac{38+2\sqrt{19}+2\sqrt{51}+10\sqrt{3}+4\sqrt{21}+2\sqrt{91}+8\sqrt{6}+6\sqrt{11}.}{210}$$

$$\text{vel } \frac{19+\sqrt{19}+\sqrt{51}+5\sqrt{3}+2\sqrt{21}+\sqrt{91}+4\sqrt{6}+3\sqrt{11}.}{105}$$

Et quidem quo plures ponantur Radii vel Diametri partes, eò minus videtur explicabilis ratio sinuum omnium ad maximum toties sumptum: adeóq; si supponantur radii vel diametri partes infinitæ, (quod ad scopum nostrum faciendum videtur,) ratio sinuum omnium ad radium toties positum, hoc est, Quadrantis vel Semicirculi ad Quadratum vel Parallelogrammum circumscriptum, videatur penitus inexplicabilis, saltem nisi ejusmodi explicatio sufficere judicanda sit, qualem prop. 121 & 135. exhibuimus.

His itaq; perpensis, prope abfuit ut rem quasi penitus conclamatam ulterius investigando desisterem. Id unicum quod spem fecit hoc erat. Nempe quod eâdem difficultate non obstante, in radicibus quadraticis, cubicis, biquadraticis &c. numerorum Arithmetice proportionalium res non male successit.

Nam, verbi gratia, si series Subsecundanorum aliquousq; continuetur, puta $\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$, ipsius ratio ad maximum toties positum, puta $7\sqrt{6}$, non videtur aliàs ex-

plicabilis quam $\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$, vel, $\frac{0+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$, vel saltem (propter $0+1+2=3$) $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$; nisi forsan placeat tam antecedentem quam consequentem rationis ducere in $\sqrt{6}$, ut prodeat ratio $3\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}+\sqrt{36}$, ad 7; vel potius $3\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}+6$, ad 7. Et similiter in aliis ejusmodi seriebus.

Verum si eadem series supponatur in infinitum continuanda, prodibit tandem ratio $\frac{2}{3}$, vel 2 ad 3, aut 1 ad $1\frac{1}{2}$. ut dictum est prop. 53, 54. ipsa quidem infinitate (quod mirum videatur) irrationalitatem destruente.

Et similiter in subtertianis, subquartanis, &c. continget, ut patet ex superius traditis prop. 54, 59.

Cum itaq;, illa difficultate non obstante, quadratura Parabolæ & ab aliis antehac & a nobis etiam nostra methodo, sed & Paraboloideos cujusvis quadratura (eâdem manente difficultate) a nobis in superioribus satis feliciter tradita sit; non plane omnis aberat spes rationem tandem inveniendi quam Radicum universalium (seriei vel auctæ vel mulctatæ) series habeat ad seriem æqualium, & quidem si non universaliter, in quibusdam saltem, quadantenus explicandi; fortassis etiam in illis ipsis quæ Circuli vel Ellipseos, & quæ Hyperbolæ quadraturam attingunt nonnihil proficere.

Ut autem quid deinceps sit inquirendum rectiùs perspiciatur, meminisse licet nos (inter alia) circuli (vel etiam Ellipseos cujusvis) quadraturam huc usq; perduxisse.

Nempe, per prop. 118, & 121, si rationum series illa $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, $\frac{384}{945}$, &c. interpolari poterit; ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet Circuli Quadrans ad Quadratum Radii, vel Circulus ipse ad quadratum Diametri.

Item, per prop 133, & 135, si interpolari poterit rationum series ista $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{140}$, $\frac{1}{630}$, &c. ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet semicirculus ad Quadratum diametri.

Sed & insuper, si interpolari poterint numeri diagoniales tabellæ

bellæ prop.132 nempe 1,2, 6, 20, 70, &c. ratio quam habet unitas ad numerum eorundem primo & secundo intermedium, est ea quam habet Circulus ad Quadratum Diametri: Et Ellipsis ad Parallelogrammum circumscriptum. Ut deinceps probabitur, ex prop. seq.

PROP. CLXVI. *Theorema.*

Si series infinita Æqualium, Primanorum, Secundanorum, aut Tertianorum,&c. respective ducatur in seipsam inverse positam; atq; eadem etiam in seipsam directe positam: erit aggregatum rectangulorum illorum, ad aggregatum horum; ut 1 ad 1,2,6, 20, 70, &c. numeros diagoniales Tabellæ prop. 132.

Nam si series Æqualium in seipsam (sive directe sive inverse positam) respective ducatur, fit series Æqualium: cui convenit ratio 1 ad 1.

Si autem series Primanorum in seipsam directe positam sic multiplicetur; fiet series Secundanorum; si series Secundanorum sic ducatur, fiet series quartanorum; si series Tertianorum, fiet series Sextanorum; &c. per prop. 73. Quibus conveniunt rationes $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{9}$. &c. per prop. 44 vel 64.

Si autem Series Primanorum respective ducatur in seipsam inversam; (puta series $a, b, c,$ &c. in seriem $D-a$, $D-b$, $D-c$, &c.) Item series Secundanorum in seipsam inversam, (puta series $a^2, b^2, c^2,$ &c. in seriē $Q:D-a$. $Q:D-b$. $Q:D-c$ &c. vel $D^2-2aD+a^2$. $D^2-2bD+b^2$. $D^2-2cD+c^2$. &c.) Item series Tertianorum in seipsam inversam; (puta series $a^3, b^3, c^3,$ &c. in seriem $C:D-a$. $C:D-b$. $C:D-c$. &c.) Et sic de reliquis; Rationes ipsis convenient, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{140}$, $\frac{1}{630}$, &c. per prop. 133, 134.

Ratio igitur rationum harum ad rationes illas, ea est quam habet 1 ad numeros 1, 2, 6, 20, 70, &c. nempe numeros diagoniales tabellæ prop. 132 (ut ex calculo patet) Quod erat demonstrandum.

$\frac{1}{3}$)	$\frac{1}{6}$	($\frac{1}{1}$
$\frac{1}{3}$)	$\frac{1}{6}$	($\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$)	$\frac{1}{30}$	($\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7}$)	$\frac{1}{140}$	($\frac{1}{20}$
$\frac{1}{6}$)	$\frac{1}{630}$	($\frac{1}{70}$

SCHOL.

SCHOLIUM.

Notandum hic, in ferie rationem $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, &c. Denominatores five confequentes funt Arithmetice proportionales; adeoq; fi in fingulis intervallis totidem effent interponendæ rationes, effent illæ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, &c. juxta analogiam Arithmetice-proportionalium, & leges prop. 44, & 64.

In ferie vero rationum $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{140}$, $\frac{1}{630}$, &c; confequentes 1, 6, 30, 140, 630, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, &c. vel $1 \times \frac{12 \times 20 \times 28 \times 36 \ \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \ \&c.}$ (ubi fractionum tam numeratores quam denominatores funt Arithmetice proportionales.) Et propterea (juxta progreffionis illius analogiam) fi numerus primo & fecundo interponendus dicatur A; fient reliqui, reliquis intervallis interponendi, continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{16 \times 24 \times 32 \ \&c}{3 \times 5 \times 7 \ \&c}$ (Et quidem numerus primo anteponendus $\frac{1}{8}$A; juxta eandem analogiam. In præcedenti autem, & propterea in mox fequenti ferie, numerus primo anteponendus evanefcit; nempe, illic in nihil, iftic in infinitum.)

In ferie deniq; rationum $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{70}$, &c. Confequentes 1, 2, 6, 20, 70, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2 \times 6 \times 10 \times 14 \ \&c}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ \&c}$ vel $1 \times \frac{4 \times 12 \times 20 \times 28 \ \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \ \&c.}$ (ubi, ut fupra, tam numeratores quam denominatores fractionum funt Arithmetice-proportionales.) Et propterea (juxta progreffionis analogiam) fi numerus primo & fecundo interponendus dicatur α, fiunt reliqui continuâ multiplicatione numerorum $\alpha \times \frac{8 \times 16 \times 24 \ \&c.}{3 \times 5 \times 7 \ \&c.}$

PROP. CLXVII. *Coroll.*

IDeoq; Si feries infinita Subfecundanorum (puta $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c.) refpective ducatur in feipfam inverfam (puta $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-b}$. $\sqrt{:D-c}$. &c. atq; eadem etiam in feipfam directe pofitam: (puta feries $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. in feriem $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c.)

&c.) erit aggregatum rectangulorum illorum (puta $\sqrt{:aD - a^2:} + \sqrt{:bD - b^2:} + \sqrt{:cD - c^2:}$ &c.) ad aggregatum horum (puta $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}$ &c. vel $a + b + c$ &c.) ut unitas ad numerum intermedium, numeris diagonialibus 1, 2, in Tabella prop. 132 interponendum.

Sequitur ex præcedente. Nam series Subsecundanorum est seriei Æqualium, & seriei Primanorum intermedia. (ut patet ex dictis prop. 64.)

Series autem Subsecundanorum in seipsam directe positam (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ &c) est series Primanorum (puta $\sqrt{a^2}, \sqrt{b^2}, \sqrt{c^2}$ &c vel a, b, c, &c.) cui convenit ratio $\frac{1}{2}$ per prop. 44, vel 64. Et propterea, si ratio quæ convenit seriei Primanorum in seipsam inversam ductæ (intermedia nempe rationibus $\frac{1}{1} : \frac{4}{6}$,) dicatur $\frac{1}{2\square}$: Ratio rationis hujus $\frac{1}{2\square}$ ad illam $\frac{1}{2}$, puta $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2\square}$ ($\frac{1}{\square}$, erit (per præced.) ea quam habet 1 ad numerum inter 1 & 2 interponendum, in serie digonialium 1, 2, 6, 20, 70, &c. tabellæ prop. 132. *Qui numerus igitur inposterum dicatur* $\square$. Estq; semissis numeri inter 1 & 6 interponendi in serie 1, 6, 30, 140, 630, &c.

PROP. CLXVIII. *Corollar.*

ET propterea; *Circulus ad quadratum diametri, est ut* 1 *ad* $\square$, *numerum nempe inter* 1 *&* 2 *interponendum in serie diagonalium* 1, 2, 6, 20, 70, *&c. tabellæ prop.* 132.

Cum enim (per prop. 133, 135.) Semicirculus ad Quadratum diametri sit ut 1 ad $2\square$ (numerum intermedium inter 1 & 6 in serie 1, 6, 30, 140, 630, &c.) erit circulus (quippe semicirculi duplus) & 1 ad $\square$, (numerum intermedium inter 1 & 2 in serie 1, 2, 6, 20, 70, &c.) per præced,

Et quidem eadem ratio $\frac{1}{\square}$; ea est, quæ intermedia ponenda est inter $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{3}$, in serie $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$ &c. prop. 118, & 121. ut & deinceps etiam ulterius patebit.

SCHOL.

SCHOLIUM.

Cum igitur (ut ad ea quæ monuimus in Schol. prop. 165. tandem redeamus) res eò redacta sit, ut si possimus rationes illas interpolare (prop. 118. memoratas) $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, &c. hoc est, quas habet 1 ad 1, $\frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}$, &c. (hoc est, ad 1, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{9}{48}$, &c.) qui termini consequentes fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}$

Vel etiam illas (prop. 133.) $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}$, &c. quarum termini consequentes 1, 6, 30, 140, &c. fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18 \text{ \&c.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ \&c.}}$

Vel deniq; si illas $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}$, &c; nempe quas habet 1 ad 1, 2, 6, 20, &c. (numeros diagoniales tabellæ prop. 132.) qui fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{14}{4}$ &c.

Si, inquam, harum rationum seriem unam aliquam interpolare possimus, habebitur accuratissima circuli quadratura. Et quidem in prima & tertia interponenda erit (post primam) ratio $\frac{1}{\square}$: in secunda vero ratio $\frac{1}{\square}$. Adeoq; interpolatione in una præstita, in reliquis etiam non difficulter fiet.

Placet igitur (ut inde exordium sumamus, unde major elucet spes quæsitum consequendi) Tabellam illam prop. 132. aggredi, ut videamus numquâ possimus arte illam interpolare: Adeóq;, ipsam repetere intermissis alternatim spaciis, (ut quæ istic sunt series prima, secunda, tertia, &c. sint hic secunda, quarta, sexta, &c.) Et paulo accuratius examinare; quod sequentibus aliquot propositionibus fiet.

PROP. CLXIX. *Theorema.*

NUmeri omnes Tabellæ prop. 132. sunt figurati. Nempe, qui in illius serie primâ (sive erecta sive transversa) sunt monadici; qui in tertia, Triangulares; qui in quarta, Pyramidales; & sic deinceps, puta Trianguli pyramidales, Pyramidipyramidales, &c.

Numer

Patet hoc inspecta tabella: & comparatis (si opus) iis, quæ de numeris figuratis apud Maurolicum aut alios occurrunt. Nominibus autem illis utor, quibus Dn. Oughtredus nostras (Mathematicus eximius) in ipsius *Clavi Mathematica* cap. 17. n. 11.

Quæ autem sunt in illa tabella prop. 132. series prima, secunda, tertia, &c. jam in eadem hic repetita fiunt (propter intermissa spatia, numeris, si fieri possit, replenda) secunda, quarta, quinta, &c.

Numeri	Monadici.	Laterales.	Triangulares.	Pyramidales.	Trian: pyram.	Pyr. pyram.
Monadici.	1	1	1	1	1	1
Laterales.	1	2	3	4	5	6
Triangulares	1	3	6	10	15	21
Pyramidales	1	4	10	20	35	56
Triangulipyram.	1	5	15	35	70	126
Pyramidipyram.	1	6	21	56	126	252

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

PROP. CLXX. *Theorema.*

SEries duæ, in expoſita Tabella, nempe Monadicorum, & Lateralium, facile interpolari poſſunt (locis interponendis quotlibet;) interpoſitis ſcil. illic quot opus eſt, unitatibus, hic, totidem mediis Arithmeticis.

Puta, ſi placet unum ubiq; numerum interponere; erit monadicorum ſeries interpolata, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Lateralium vero $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6. vel $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$, 6.

Ratio patet; quoniam numeri ſunt illic æquales, hic Arithmetice-proportionales.

SCHOLIUM.

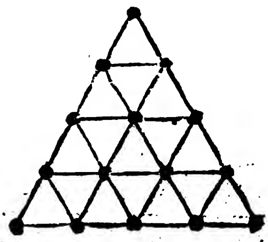
Reliquæ autem ſeries non ita facile interpolantur, niſi invento prius cujuſq; ſeriei proprio charactere; quod ſequentibus propoſitionibus inveſtigabimus.

PROP. CLXXI. *Lemma.*

PRopoſitum ſit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulares, ad ſuum latus.

Illud hoc progreſſu inveſtigabimus.

1. Si puncta totidem, quot numerus aliquis triangularis poſtulat, debita forma triangulari diſponantur, & rectis conjungantur, ut in appoſito ſchemate; manifeſtum eſt totam figuram triangularem in tot triangula dividi (tam toti, quam inter ſe ſimilia) quot eſt quadratũ numeri lateralis unitate minuti. (quod ſi opus ſit, demonſtrari poteſt ex 19 e 6.) Adeoq; ſi ipſius numerus lateralis ſit l, erit numerus triangulorum



parti-

particularium $Q: l - 1 := l^2 - 2l + 1$.

2. Quum horum triangulorum quodlibet habeat tres angulos, erit horum angulorum numerus $3l^2 - 6l + 3$.

3. Notandum est ad totius figuræ tria puncta angularia, non nisi tot angulos apponi (nempe ad singula unum:) & propterea illi tres anguli occupant tria puncta, seu $3P$.

4. Ad reliqua puncta in lateribus, terminantur anguli terni; quorum igitur quilibet occupat trientem puncti. Sunt autem intermedia illa puncta lateralia, in quolibet latere $l - 2$, ergo in omnibus $3l - 6$, (nempe propter tria latera;) & anguli ad hæc intermedia puncta adjacentes $9l - 18$, (propter ternos angulos ad singula puncta;) quorum quilibet occupat trientem puncti, seu $\frac{1}{3}P$; adeoque omnes occupant $\frac{9l - 18}{3}P$.

5. Ad reliqua quæ supersunt puncta, intra aream figuræ, terminantur anguli seni (ad quodlibet nempe sex,) qui propterea occupant sextantem puncti. Quot autem illi sunt anguli, sic colligitur. Totus angulorum numerus est (ut diximus) $3l^2 - 6l + 3$: Hinc si subducantur 3 (ad totius figuræ angulos positi,) & $9l - 18$ (ad puncta lateralia adjacentes) manebunt $3l^2 - 15l + 18$; qui est numerus angulorum ad puncta intra aream terminatorum. Cum verò horum quilibet occupat sextantem puncti, sive $\frac{1}{6}P$; occupabunt hi omnes $\frac{3l^2 - 15l + 18}{6}P$.

6. Deniq;, si simul addantur puncta sic inventa; nempe $3P$ & $\frac{9l - 18}{3}P$ & $\frac{3l^2 - 15l + 18}{6}P$; erit horum aggregatum $\frac{l^2 + l}{2}$ Puncta; numerus punctorum omnium: Hoc est, numerus triangularis cujus latus l. Ideoq; ----

PROP. CLXXII. *Theorema.*

Latus numeri cujusvis Triangularis ad ipsum numerum, est ut l ad $\frac{l^2 + l}{2}$

Ut ostensum est in præced.

Adeoq; , dato latere l dabitur numerus Triangularis isti lateri conveniens ; puta $n = \frac{l^2 + l}{2}$.

Et contra, Dato numero Triangulari, invenietur ipsius latus.

Nempe, resolvendo hanc Æquationem $2n = l^2 + l$, erit $\sqrt{:\frac{1}{4} + 2n:} - \frac{1}{2} = l$.

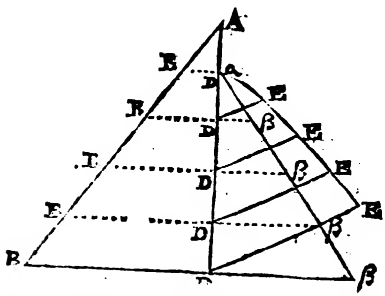
PROP. CLXXIII. *Coroll.*

SI Hyperbolæ Diameter transversa sit 1, *& Latus rectum* $\frac{1}{2}$; *sumptis diametris (puncto applicationis & vertice interceptis)* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. Ordinatim-applicatarum quadrata erunt* 1, 3, 6, 10, 15. *&c. nempe numeri triangulares, cujus latera sunt* 1, 2, 3, 4, 5, *&c.*

Probatur per 17 vel 33 prop. Con. Sect. nost. Hyperbolam ipsam exhibebit figura prop. seq.

PROP. CLXXIV. *Corollarium.*

ITem, si fiant ad eandem rectam $A\alpha D$ *duo triangula similia,* $\alpha D\beta$, ADB; *sitq; ut* 1 *ad* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *sic* AD *ad* DB *&* αD *ad* $D\beta$; *& sumantur æquales* $A\alpha = 1 = \alpha D = DD$ *&c. Rectangula* $BD\beta$, $BD\beta$, *&c. erunt ad invicem ut* 1, 3, 6, 10, *&c. numeri triangulares, quorum latera sunt* αD, αD, *&c. Mediæ vero proportionales inter* BD, $D\beta$; DB, $D\beta$ *&c, sunt ordinatim-applicatæ in Hyperbola* ADE; *cujus diameter transversa* $A\alpha$, *& latus rectum* αB, *vel ipsi æquale.*



Patet ex calculo. Nam rectangulorum $BD\beta$, primum erit $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 1$. Secundum $2\sqrt{\frac{1}{2}} \times 3\sqrt{\frac{1}{2}} = 3$. Tertium $3\sqrt{}$ [illegible]

$\times 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 6$. Quartum $4\sqrt{\frac{1}{2}} \times 5\sqrt{\frac{1}{2}} = 10$. Et ſic deinceps. Quæ ſunt quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola, per præced. ideoq; Mediæ proportionales puta $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, &c. ipſæ ordinatim-applicatæ.

SCHOLIUM.

Si autem ſumpta fuiſſent $AD = DB$ & $\alpha D = D\beta$, tum rectangula fuiſſent $1 \times 2 = 2$. $2 \times 3 = 6$. $3 \times 4 = 12$. $4 \times 5 = 20$, &c. dupla numerorum triangularium: & Mediæ proportionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, &c. eſſent ordinatim-applicatæ in Hyperbola, cujus tam latus rectum quam latus tranſverſum ſit 1. ut, ex dictis, conſideranti patebit.

PROP. CLXXV. *Theorema.*

SEries numerorum Triangularium, in præmiſſa tabella, commode interpolari poterit, ſi ipſorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ arithmeticæ, quot opus eſt, & ex iis formentur numeri triangulares, juxta prop. 172.

Puta ſi in ſerie numerorum triangularium 1, 3, 6, 10, 15, &c. unus ubiq; interponendus eſt numerus; eorum latera 1, 2, 3, 4, 5, &c. mediis arithmeticis debite interpolata erunt $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, &c. quibus lateribus (per prop 172.) respondent numeri triangulares, $\frac{3}{8}$, 1, $1\frac{7}{8}$, 3, $4\frac{3}{8}$, 6, $7\frac{7}{8}$, 10, $12\frac{3}{8}$, 15, $17\frac{7}{8}$, 21, &c. Vel $\frac{3}{8}$, 1, $\frac{15}{8}$, 3, $\frac{35}{8}$, 6, $\frac{63}{8}$, 10, $\frac{99}{8}$, 15 $\frac{143}{8}$, 21, &c. Vel deniq; $\frac{3}{8}$. $\frac{8}{8}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{24}{8}$, $\frac{35}{8}$, $\frac{48}{8}$, $\frac{63}{8}$, $\frac{80}{8}$, $\frac{99}{8}$, $\frac{120}{8}$, $\frac{143}{8}$, $\frac{168}{8}$, &c. quorum quidem differentiæ ſunt Arithmetice-proportionales.

Pari modo, ſi interponendi ſint in ſingulis intervallis duo loci; prodirent numeri, $\frac{2}{9}$. $\frac{5}{9}$. 1. $\frac{14}{9}$. $\frac{20}{9}$. 3. $\frac{35}{9}$. $\frac{44}{9}$. 6. $\frac{65}{9}$. $\frac{77}{9}$. 10. &c. Vel $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{27}{9}$, &c. quorum item differentiæ ſunt Arithmetice proportionales.

PROP.

PROP. CLXXVI. *Lemma.*

PRopositum sit inquirere quam habeant rationem numeri Pyramidales, ad latus suum.

Liceret & hanc propositionem pari progressu investigare, quo in prop. 171 usus sum: (observato interim discrimine quo differt debita numeri pyramidalis dispositio a dispositione numeri Triangularis:) quod qui volet experiri poterit. Verum cum non ita facile esset lectori concipere debitum punctorum situm in pyramide (ut quæ non omnia supponenda sunt in eodem plano) & angulorum solidorum ad ea puncta positionem: satius videtur illud hac quæ sequitur methodo præstare. (Quæ quidem, nisi mallem utrumq; modum ostendisse, adhiberi potuisset etiam ad prop. 171.)

1 Numerus Pyramidalis æquatur aggregato numerorum triangularium (ut patet ex dictis ad prop. 130. & 132.) nempe ab unitate ad numerum Triangularem sibi collateralem inclusive. (sicut & numeri Triangulares fiunt aggregatione Lateralium; & Laterales, Monadicorum; ut & Triangulipyramidales, Pyramidalium; & sic deinceps.)

2. Est autem lateris l, numerus quilibet Triangularis $\frac{l^2+l}{2}$. per prop. 171.

3. Ergo, sumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c; vel (eorum loco) a, b, c, d, &c; summa horum a^2+a, b^2+b, c^2+c, d^2+d, &c, erit duplum aggregati Triangularium; (quorum numerus erit æqualis lateri maximi:) & hujus propterea semissis, erit numerus Pyramidalis, cujus latus æquatur lateri maximi Triangularium.

$$2\left)\begin{array}{c} a^2+a \\ b^2+b \\ c^2+c \\ d^2+d \\ \&c \\ \hline \text{Num. Pyramid.} \end{array}\right.$$

4. Est igitur numerus Pyramidalis semissis aggregati duarum serierum; eousq; ab unitate continuatarum, donec numerus locorum æquetur lateri numeri Pyramidalis quæsiti, quod supponatur l: Quibus si præponatur locus alter o^2+o, (ut series intelligantur ab o inchoatæ,) fiet harum numerus $l+1$. Et utriusq;

utriusq; seriei summa seorsim innotescet per prop. 2 & 20.

5. Nempe, summa seriei primanorum $0 + a + b + c$. &c, quorum ultimum est l, numerus locorum $l + 1$; erit $\frac{l+1}{2} l$. per prop. 2.

6 Et summa seriei secundanorum $0 + a^2 + b^2 + c^2$ &c, quorum ultimum est l^2 & numerus locorum $l + 1$; erit $\frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6l} l^2$ vel $\frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6} l$. per Prop. 20.

7 Utriusq; igitur summæ aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2} l + \frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6} l$,) nempe $\frac{3l^2 + 3l + 2l^3 + 2l^2 + l^2 + l}{6} = \frac{2l^3 + 6l^2 + 4l}{6}$, est aggregatum duarum serierum; cujus aggregati semissis $\frac{l^3 + 3l^2 + 2l}{6}$ est numerus pyramidalis cujus latus l. Ideoq; -----

PROP. CLXXVII. *Theorema.*

Latus numeri cujusvis Pyramidalis ad ipsum numerum suum, est ut l ad $\frac{l^3 + 3l^2 + 2l}{6}$.

Ut ostenditur est in præced.

At, dato numero pyramidali n, non innotescit ipsius latus, nisi resolvendo Æquationem Cubicam $6n = l^3 + 3l^2 + 2l$.

PROP. CLXXVIII. *Theorema.*

Series numerorum Pyramidalium, in præmissa tabella commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ arithmeticæ quot opus est, & ex iis formentur numeri pyramidales, juxta prop. præced.

Puta, si numerorum pyramidalium 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c. latera

latera 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ſi impolata ſint $\frac{1}{2}$, 1, 1 $\frac{1}{2}$, 2, 2 $\frac{1}{2}$, 3 $\frac{1}{2}$, 4, 4 $\frac{1}{2}$, 5, 5 $\frac{1}{2}$, 6, &c. hiſce lateribus reſpondebit ſerie pyramidalium $\frac{5}{16}$, 1, 2 $\frac{3}{16}$, 4, 6 $\frac{9}{16}$, 10, 14 $\frac{7}{16}$, 20, 26 $\frac{13}{16}$, 35, 44 $\frac{11}{16}$, 56, &c. vel etiam $\frac{5}{16}$, 1, $\frac{35}{16}$, 4, $\frac{105}{16}$, 10, $\frac{231}{16}$, 20, $\frac{429}{16}$, 35, $\frac{715}{16}$, 56, &c. Vel potius $\frac{15}{48}$, 1, $\frac{105}{48}$, 4, $\frac{315}{48}$, 10, $\frac{693}{48}$, 20, $\frac{1287}{48}$, 35, $\frac{2145}{48}$, 56, &c.

PROP. CLXXIX. *Lemma.*

PRopoſitum ſit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulipyramidales ad latus ſuum.

Præſtabitur hoc eâdem methodo quâ prop. 176. Nempe.

1. Numerus Triangulipyramidalis æquatur aggregato numerorum omnium Pyramidalium (intellige, quorum latera ſunt numeri integri, nam de interpolatis hic non agitur,) ab unitate ad numerum ſibi collateralem, incluſive.

2. Eſt autem lateris l, numerus Pyramidalis $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$ per prop. 177.

3. Ergo, ſumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c. vel (eorum loco) a, b, c, d, &c. ſumma horum a^3+3a^2+2a, b^3+3b^2+2b, c^3+3c^2+2c, d^3+3d^2+2d, &c. erit ſextuplum aggregati Pyramidalium (quorum omnium numerus erit æqualis lateri eorum maximi, ut patet:) & propterea hujus aggregati ſextans erit numerus Triangulipyramidalis, cujus latus idem erit cum latere maximi Pyramidalium.

$$6\left)\begin{array}{l} a^3+3a^2+2a \\ b^3+3b^2+2b \\ c^3+3c^2+2c \\ d^3+3d^2+2d \\ \quad\&c. \\ \hline \text{Num. Triangulipyram.} \end{array}\right.$$

4. Adeoq; numerus Triangulipyramidalis eſt ſexta pars aggregati trium ſerierum, eouſq; ab unitate continuatarum donec numerus terminorum ſit æqualis lateri numeri Triangulipyramidalis propoſiti, quod dicatur l: adeoq; ſi ipſis præponatur terminus alter 0^3+0^2+0 (ut ſeries intelligantur ab 0 inchoatæ) fiet numerus terminorum $l+1$. Et ſingularum ſerierum illarum, ſumma ſeorſim innoteſcet per prop. 2. 20. & 40.

5 Nempe

5 Nempe summa duplicatæ seriei Primanorum, $0+2a+2b+2c$, &c. cujus terminus ultimus $2l$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2} \cdot 2l$. per prop. 2.

6 Summa triplicatæ seriei secundanorum, $0+3a^2+3b^2+3c^2$ &c, cujus terminus ultimus $3l^2$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{3} 3l^2 + \frac{l+1}{6l} 3l^2$. per prop. 20.

7. Summa seriei Tertianorum, $0+a^3+b^3+c^3$ &c. cujus terminus ultimus l^3, numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{4} l^3 + \frac{l+1}{4l} l^3$. per prop. 40.

8. Harum igitur summarum aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2} 2l + \frac{l+1}{3} 3l^2 + \frac{l+1}{6l} 3l^2 + \frac{l+1}{4} l^3 + \frac{l+1}{4l} l^3$.) nempe

$$\frac{24l^2+24l+24l^3+24l^2+12l^2+12l+6l^4+6l^3+6l^3+6l^2}{24}$$

$= \frac{6l^4+36l^3+66l^2+36l}{24}$ est aggregatum trium illarum serierum; cujus aggregati sextans $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$ est numerus Triangulipyramidalis cujus latus l, Ideoq; ----

PROP. CLXXX. *Theorema.*

Latus numeri Triangulipyramidalis ad ipsum numerum, est ut l ad $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Adeoq;, Dato latere l dabitur numerus Triangulipyramidalis, puta $n = \frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Dato autem numero Triangulipyramidali, non invenitur ipsius latus nisi resolvendo hanc æquationem $24n = l^4+6l^3+11l^2+6l$.

PROP. CLXXXI. *Theorema.*

Series numerorum Triangulipyramidalium, in præmissa Tabella, commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus, tot interponantur medii Arithmetici, quot opus est, & ex iis formentur numeri Triangulipyramidales, per præcedentem.

Puta lateribus interpolatis $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, &c. respondent numeri Triangulipyramidales $\frac{35}{128}$, 1, $2\frac{59}{128}$, 5, $9\frac{3}{128}$, 15, $23\frac{59}{128}$, 35, $50\frac{35}{128}$, 70, $94\frac{123}{128}$, 126, &c. vel etiam $\frac{35}{128}$, 1, $\frac{315}{128}$, 5, $\frac{1155}{128}$, 15, $\frac{3003}{128}$, 35, $\frac{6435}{128}$, 70, $\frac{12155}{128}$, 126, &c. Vel potius $\frac{105}{384}$, 1, $\frac{945}{384}$, 5, $\frac{3465}{384}$, 15, $\frac{9009}{384}$, 35, $\frac{19305}{384}$, 70, $\frac{36465}{384}$, 126, &c.

PROP. CLXXXII. *Lemma.*

Propositum sit inquirere, quam ad latus suum rationem habeant sequentium serierum numeri Figurati puta Pyramidipyramidales, &c.

Posset quidem hoc præstari eadem methodo quâ usus sum ad prop. 176, & 179. ope propositionum ibidem memoratarum, nempe pr. 2, 20, & 40, simul cum prop. 43. saltem si prius ulterius prosecuti fuerimus traditionem rationum quas habent series finitæ Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, (cum sequentibus;) ad series Æqualium; quam traditionem non nisi leviter innuimus ad prop. 43. Eam vero siquis ulterius continuandam velit, licebit ipsi vel aliâ quæ sibi maxime placeat methodo id præstare, vel etiam (nisi meliora ipsi occurrant auxilia) ope hujus ipsius quam jam præ manibus habemus Tabellæ, postquam viâ mox docenda ostenderimus rationes numerorum figuratorum ad suum cujuslibet latus in sequentibus seriebus investigare. Nam ut ad prop. 176 & 179, ex cognitis rationibus simplicium serierum finitarum (puta Primanorum,

Secunda-

Secundanorum, Tertianorum, per prop. 2, 20, 40. ad seriem Æqualium) investigantur rationes hujus Tabellæ (puta numerorum Triangularium, Pyramidalium, Triangulipyramidalium, ad sua respective latera:) ita, vice versa, ex cognitis his licebit & illas expiscari, adeoq; illam propositionis 43 traditionem quousq; libet continuare.

Quoniam autem illud (ut diximus) non nisi leviter traditum est ad prop. 43. Nec quidem necesse sit ad præsens institutum illud ulterius prosequi, cum ex cognitis paucarum istius Tabellæ serierum characteribus (sive rationibus quas numeri isti figurati habent ad sua respective latera) sequentium etiam characteres investigandi methodus elucescat, ego illa ut faciliori jam utar, quæ hæc est.

Patet ex præmissis, character seriei numerorum.

Monadicorum 1. Lateralium l. Triangulorum $\frac{l^2+l}{2}$.

Pyramidalium $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$. Triangulipyram. $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Patet etiam, accuratius intuenti, characteres hos fieri continua multiplicatione harum quantitatum,

$$1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4} \text{ \&c. vel } 1 \times \frac{l \text{ in } l+1 \text{ in } l+2 \text{ in } l+3}{1 \text{ in } 2 \text{ in } 3 \text{ in } 4}.$$

Nam $1 \times \frac{l+0}{1} = l$.

$$l \times \frac{l+1}{2} = \frac{l^2+l}{2}$$

$$\frac{l^2+l}{2} \times \frac{l+2}{3} = \frac{l^3+3l^2+2l}{6}$$

$$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} \times \frac{l+3}{4} = \frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$$

Adeoq;, si continuetur ulterius multiplicatio rationis ultimo inventæ in $\frac{l+4}{5} \times \frac{l+5}{6} \times \frac{l+6}{7}$ &c. habebimus sequentium serierum characteres.

Puta. $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$.

Item $\frac{l^6+15l^5+85l^4+225l^3+274l^2+120l}{120}$

Et sic deinceps, quousq; libet.

SCHOLIUM.

Diximus modo, ex rationibus sive characteribus præsentis Tabellæ continuatis, deduci posse continuationem etiam rationum illarum quas indicat prop. 43. Quoniam vero illud fortasse non erit omnibus obvium: operæ pretium duxi paucis id in transitu ostendere. Quod quidem ut sine incommodo hic possit inseri, ita quibusdam forsan ingratum non erit. Ideoq; , exempli gratia, ----

Propositum sit inquirere, quam habeat rationem series finita Quartanorum, (ab o inchoata,) ad seriem totidem maximo Æqualium.

1. Character numeri Triangulipyramidalis, (per prop. 180:) est $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$; Et Pyramidi-pyramidalis $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$, per prop. 182.

2. Est autem, (ut sæpius dictum est,) numerus Figuratus unius gradus (in præsenti tabella) aggregatum omniũ præcedentium in gradu sibi proximo: Adeoq; numerus Pyramidipyramidalis, est aggregatum Triangulipyramidalium.

$$24\left)\begin{array}{c} 0^4+0^3+0^2+0 \\ a^4+6a^3+11a^2+6a \\ b^4+6b^3+11b^2+6b \\ c^4+6c^3+11c^2+6c \\ \&c.\ ad \\ l^4+6l^3+11l^2+6l \end{array}\right\}\text{Addita.}$$

$$\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l.\ \text{Aggregatũ}}{24\times 5=120}$$

3. Et propterea, sumptis lateribus 1, 2, 3, &c. vel (eorum loco) a, b, c, &c. (quorum maximum dicatur l.) & formatis inde numeris Triangulipyramidalibus; Horum aggregatum erit numerus Pyramidipyramidalis ejusdem lateris, nempe $\frac{l^5+10l^4+25l^3+50l^2+24l}{120}$.

4. Summa autem seriei $0+6a+6b+6c$ &c, est (per prop. 2.) $\frac{l+1}{2}6l = \frac{6l^2+6l}{2}$.

5. Summa seriei $0+11a^2+11b^2+11c^2$ &c, est (per p. 20) $\frac{l+1}{3}11l^2 + \frac{l+1}{6l}11l^2 = \frac{11l^3+11l^2}{3} + \frac{11l^2+11l}{6} = \frac{22l^3+33l^2+11l}{6}$.

6. Summa seriei $0+6a^3+6b^3+6c^3$ &c, est (per prop. 40.) $\frac{l+1}{4}6l^3 + \frac{l+1}{4l}6l^3 = \frac{6l^4+6l^3}{4} + \frac{6l^3+6l^2}{4} = \frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4}$.

7. Hæ tres summæ in unam collectæ, sunt
$\frac{6l^2+6l}{2} + \frac{22l^3+33l^2+11l}{6} + \frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4} = \frac{9l^4+40l^3+60l^2+29l}{6}$.

8. Si igitur ex vigintiquadruplo totius aggregati, auferatur summa trium serierum.

Nempe si ex	5)	$l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l$.
auferatur	6)	$9l^4+40l^3+60l^2+29l$
Hoc est, Si ex	30)	$6l^5+60l^4+210l^3+300l^2+144l$
auferatur	30)	$+45l^4+200l^3+300l^2+145l$
Manebit summa seriei quartæ, quę est Quartanorũ	30)	$6l^5+15l^4+10l^3+00l^2-1l$

Hoc est

$$\frac{\begin{matrix}6l^5+6l^4\\ +9l^4+9l^3\\ +1l^3+1l^2\\ -1l^2-1l\end{matrix}}{30}$$

Hoc est $\frac{l+1}{5}l^4 + \frac{3l+3}{10}l^3 + \frac{l+1}{30}l^2 - \frac{l+1}{30}l$

Quæ

Item $\frac{l^6 + 15l^5 + 85l^4 + 225l^3 + 274l^2 + 120l}{120}$

Et sic deinceps, quousq; libet.

SCHOLIUM.

Diximus modo, ex rationibus sive characteribus præsentis Tabellæ continuatis, deduci posse continuationem etiam rationum illarum quas indicat prop. 43. Quoniam vero illud fortasse non erit omnibus obvium: operæ pretium duxi paucis id in transitu ostendere. Quod quidem ut sine incommodo hic possit inseri, ita quibusdam forsan ingratum non erit. Ideoq;, exempli gratia, ----

Propositum sit inquirere, quam habeat rationem series finita Quartanorum, (ab 0 inchoata,) ad seriem totidem maximo Æqualium.

1. Character numeri Triangulipyramidalis, (per prop. 180:) est $\frac{l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l}{24}$; Et Pyramidi-pyramidalis $\frac{l^5 + 10l^4 + 35l^3 + 50l^2 + 24l}{120}$, per prop. 182.

2. Est autem, (ut sæpius dictum est,) numerus Figuratus unius gradus (in præsenti tabella) aggregatum omniū præcedentium in gradu sibi proximo: Adeoq; numerus Pyramidipyramidalis, est aggregatum Triangulipyramidalium.

$$24)\left.\begin{array}{c} 0^4 + 0^3 + 0^2 + 0 \\ a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a \\ b^4 + 6b^3 + 11b^2 + 6b \\ c^4 + 6c^3 + 11c^2 + 6c \\ \&c.\ ad \\ l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l \end{array}\right\}\text{Addita.}$$

$$\frac{l^5 + 10l^4 + 35l^3 + 50l^2 + 24l}{24 \times 5 = 120}\ \text{Aggregatū}$$

3. Et propterea, sumptis lateribus 1, 2, 3, &c. vel (eorum loco) *a*, *b*, *c*, &c. (quorum maximum dicatur *l*.) & formatis inde numeris Triangulipyramidalibus; Horum aggregatum erit numerus Pyramidipyramidalis ejusdem lateris, nempe $\frac{l^5 + 10l^4 + 25l^3 + 50l^2 + 24l}{120}$.

4 Sum-

4. Summa autem seriei $0+6a+6b+6c$ &c, est (per prop. 2.)
$$\frac{l+1}{2}\,6l = \frac{6l^2+6l}{2}.$$

5. Summa seriei $0+11a^2+11b^2+11c^2$ &c, est (per p. 20)
$$\frac{l+1}{3}\,11l^2+\frac{l+1}{6l}\,11l^2 = \frac{11l^3+11l^2}{3}+\frac{11l^2+11l}{6} = \frac{22l^3+33l^2+11l}{6}.$$

6. Summa seriei $0+6a^3+6b^3+6c^3$ &c, est (per prop. 40.)
$$\frac{l+1}{4}\,6l^3+\frac{l+1}{4l}\,6l^3 = \frac{6l^4+6l^3}{4}+\frac{6l^3+6l^2}{4} = \frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4}.$$

7. Hæ tres summæ in unam collectæ, sunt
$$\frac{6l^2+6l}{2}+\frac{22l^3+33l^2+11l}{6}+\frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4} = \frac{9l^4+40l^3+60l^2+29l}{6}.$$

8. Si igitur ex vigintiquadruplo totius aggregati, auferatur summa trium serierum.

$$\begin{array}{lll}
\text{Nempe si ex} & 5) & l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l \\
\text{auferatur} & 6) & 9l^4+40l^3+60l^2+29l \\
\text{Hoc est, Si ex} & 30) & 6l^5+60l^4+210l^3+300l^2+144l \\
\text{auferatur} & 30) & +45l^4+200l^3+300l^2+145l \\
\text{Manebit summa seriei quartæ, quæ est Quartanorum} & 30) & 6l^5+15l^4+10l^3+00l^2-1l
\end{array}$$

$$\text{Hoc est}\quad 30)\ \begin{array}{l}
6l^5+6l^4 \\
\quad +9l^4+9l^3 \\
\qquad +1l^3+1l^2 \\
\qquad\quad -1l^2-1l
\end{array}$$

$$\text{Hoc est}\ \frac{l+1}{5}\,l^4+\frac{3l+3}{10}\,l^3+\frac{l+1}{30}\,l^2-\frac{l+1}{30}\,l$$

Quæ

Quæ est igitur summa seriei Quartanorum cujus terminus ultimus est l^4 numerus terminorum $l+1$.

Vel; si pro numero terminorum $l+1$, substituatur n, & propterea series æqualium nl^4; erit series Quartanorum $\frac{1}{5}nl^4 + \frac{3}{10}nl^3 + \frac{1}{30}nl^2 - \frac{1}{30}nl$. (si nempe terminus primus sit 0, secundus 1:) vel $\frac{nl^4}{5} + \frac{3nl^4}{10l} + \frac{nl^4}{30l^2} - \frac{nl^4}{30l^3}$.

9. Adeoq; series finita Quartanorum ad seriem totidem maximo Æqualium est ut $\frac{1}{5} + \frac{3}{10l} + \frac{1}{30l^2} - \frac{1}{30l^3}$ ad 1. Quod erat inquirendum.

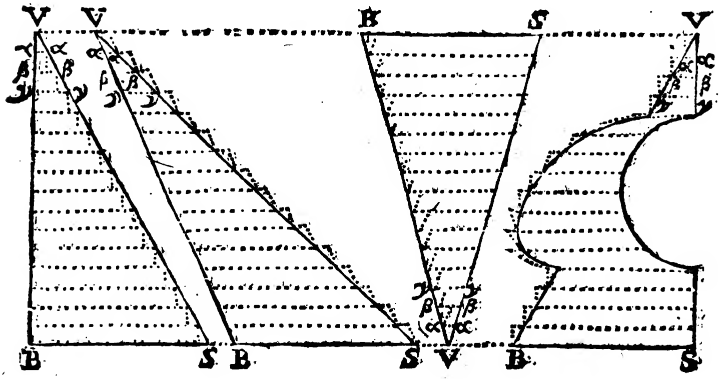
Et pari modo, his cognitis, ratio quam habet ad seriem Æqualium series Quintanorum, invenietur ope characteris in proxima præsentis tabellæ serie: Et deinde, quam habet series Sextanorum, ope characteris seriei proxime subsequentis in hac tabella; & sic deinceps quousq; libet.

Quo melius autem hoc intelligatur, operæ fortasse pretium erit, quæ jam tradita sunt, paulo distinctius aperire: Utut enim ea satis aperte tradidisse nos nobis videamur, fieri tamen potest ut lector illis minus assuetus nonnunquam forsan hæsitet.

Notandum igitur est, nos hic (ut & alibi semper, ubi de finita serie verba fiunt,) numerum terminorum assignare $l+1$ (nempe si terminus primus 0, secundus dicatur 1,) nimirum unitate majorem quam est numerus particularum ex quibus conflatur terminus maximus, hoc est, omnium differentiarum terminorum continue positorum, quarum omnium aggregato terminus maximus æquatur; sive differentiæ illæ sint æquales, ut in serie primanorum, (puta 1,1,1,1, &c, differentiæ numerorum arithmetice proportionalium,) sive crescentes, ut in serie secundanorum, tertianorum, &c. (puta 1,3,5,7,&c. differentiæ numerorum quadraticorum, vel 1,7,19,37, &c, differentiæ numerorum cubicorum; &c:) sive etiam decrescentes, ut in serie subsecundanorum, subtertianorum &c; (nam verbi gratia, differentia $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ minor est quam $\sqrt{2}-\sqrt{1}$, atq; hæc minor quam $\sqrt{1}-\sqrt{0}$; & sic in cæteris.) Harum omnium differentiarum (in qualibet serie) numerus l, unitate minor est quam numerus terminorum, ut patet; earumq; omnium aggregatum (propter termini primi 0 nullitatem) est ipse terminus

minus maximus. Ubi autem numerus terminorum dicitur n, numerus differentiarum, sive particularum in maximo, erit $n-1$.

Exemplum esto, series primanorum, quale est Aggregatum parallelogrammorum æque-altorum figuram triangulo inscriptam complentium: quorum si primum dicatur 0, (quippe nullius latitudinis, utut altitudinis ejusdem cum reliquis,)



secundum 1, &c. omnium numerus 16, erunt differentiæ 15, (invicem æquales, nempe 1 ubique;) & maximum propterea 15. Adeoque cum in singulis parallelogrammis altitudo communis sit $\frac{1}{16}$ VB (in fig. 1.) & latitudinum incrementum continuum $\frac{1}{16}$ BS: Omnes simul altitudines, hoc est, figuræ inscriptæ altitudo, VB $= \frac{16}{16}$ VB; at omnia simul latitudinum incrementa, hoc est, Basis figuræ inscriptæ, non BS, sed $\frac{15}{16}$ BS, sive BS $-$ $\frac{1}{16}$ BS. Si autem uno adhuc gradu ulterius procedatur, adjuncto infra basem uno adhuc parallelogrammo, erit quidem illius latitudo BS præcise, sed altitudo jam fiet auctior, nempe VB $+$ $\frac{1}{16}$ VB. Si vero (ut in fig. 2.) sumatur figura ex parallelogrammis circumscripta, erunt tum omnium simul parallelogrammorum altitudines, hoc est, figuræ circumscriptæ altitudo, VB (quam finge jam basi perpendicularem,) tum latitudinum simul omnes particulæ, hoc est, basis figuræ circum-

cum-

cumscriptæ, BS præcise: at vero jam non ab o sed 1, series inchoatur: sin series hæc supra verticem uno adhuc gradu continuetur (ut inchoetur ab o,) erit jam altitudo sic aucta V B + $\frac{1}{\infty}$ VB, ut patet. Adeoq; figura inscripta uno infra basin gradu continuata, & figura circumscripta continuata uno gradu supra verticem, tantundem valent.

Atq; hoc totum in triangulo (atq; eadem ratione in figuris aliis, nisi quod illic incrementa sint inæqualia) satis est manifestum. Nam (præterquam quod ex jam dictis satis pateat) si in triangulo ducantur quotlibet rectæ basi parallelæ (in quarum censu & basin ipsam, & punctum verticis, censeri volumus,) eisq; totidem adjaceant parallelogramma: si illa omnia supponantur infra suas rectas jacere, erit eorum infimum subter basem, sin supra, erit supremum supra verticem; si autem supponamus rectas illas neq; in parallelogrammorum suorum summo neq; in imo jacere, sed per ipsorum media transire, tum eorum tam supremum quam infimum erit partim intra partim extra triangulum. Adeoq; quemcunq; situm habere supponantur illæ rectæ ad sua parallelogramma, figura illa ex parallelogrammis constans (dummodo ab o inchoetur) habebit vel basin suam una parte minorem, vel altitudinem una parte majorem quam habet verum illud triangulum.

Atq; hic quidem sive excessus sive defectus, quamdiu de finita serie agitur, omnino animadvertendus est: ubi autem de serie infinita agitur, tuto poterit negligi. Cum enim quo plures supponantur termini eo minor illa evadat sive basium sive altitudinum differentia, ubi in infinitum proceditur evanescet, quippe $\frac{1}{\infty}$ (pars infinite parva) habenda erit pro nihilo; (ea saltem adhibita limitatione de qua mox dicetur.) Sic, verbi gratia, si triangulo cujus altitudo A, basis B, inscribatur figura ex parallelogrammis quorum singulorũ altitudo $\frac{1}{\infty}$ A, & longitudinum incrementa $\frac{1}{\infty}$ A, erit inscriptæ altitudo $\infty \times \frac{1}{\infty} A = A$, basis non B sed $B - \frac{1}{\infty} B$: est enim altitudinum numerus ∞, at differentiarum $\infty - 1$. Si vero figura sic inscripta continuetur uno gradu infra basem, vel circumscripta uno gradu supra verticem, erit basis $\infty \times \frac{1}{\infty} B = B$, altitudo $A + \frac{1}{\infty} A$; quippe jam numerus incrementorum est ∞, altitudinum $\infty + 1$. Ubi igitur de serie finita agitur, per altitudinem & Basin intelligendæ sunt altitudo & basis figuræ sic adscriptæ (sive inscripta sit,

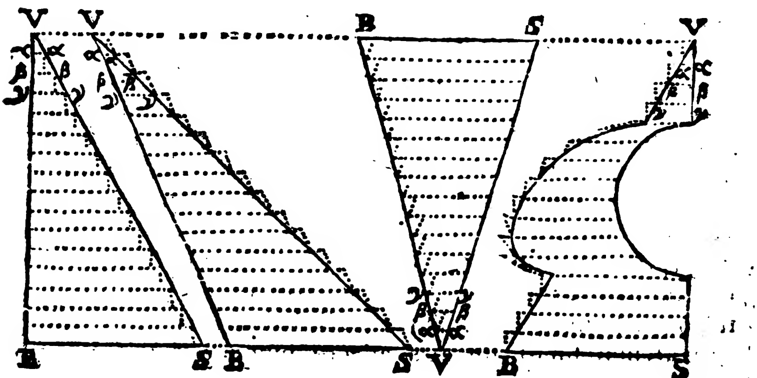
five circumſcripta) non autem iſtius cui adſcribitur; at vero in ſerie infinita perinde eſt ſive hujus ſive illius intelligantur, propter differentiã infinite exiguam, adeoq; evaneſcentem ſive nullam. Nam ∞, $\infty + 1$, $\infty - 1$, perinde ſunt. Et quemadmodũ ubi polygonum infinitorum laterum, pro circulo habetur, perinde eſt ſive inſcriptum ſive circumſcriptum intelligatur, (hoc eſt, ſive ſupponatur circuli radius æqualis rectæ quæ a centro ad angulos, ſive illi quæ a centro ad medium lateris ducitur, quarum differentia, propter latera numero infinita, eſt infinite exigua:) ſic in adſcriptionibus noſtris perinde eſt (propter differentiam infinite parvam) an inſcriptæ an circumſcriptæ altitudo aut baſis ſumatur pro vera. Et quidem ut in polygono infinitorum laterum inſcripto & circumſcripto, latera ſupponuntur invicem æqualia, hoc eſt, ejuſdem arcus ſinus rectus & tangens æquales tam invicem quam ipſi arcui, ita & hic figuræ ex parallelogrammis inſcriptæ & circumſcriptæ tam baſes quam altitudines ſupponendæ ſunt æquales tam inter ſe quam illius cui adſcribuntur; hoc eſt, ſi accurate loqui libeat, non niſi infinite exigua ſui parte differre.

Eodem modo, in fig. prop. 5. Figura ex ſimilibus ſectoribus ſpirali inſcripta, ſi ſectorum numerus ſit finitus, erit ſeries finita, cujus terminus primus eſt o, ultimus verò ſectorum inſcriptorum ultimus (cujus radius eſt una parte minor, quam ultimi circumſcriptorum,) omniumq; horum ſectorum arcus ſimul ſumpti, æquantur ſemiſſi arcus circuli contermini, nempe qui eſt figuræ ex ſectoribus conflatæ cõterminus, non qui cõterminus eſt veræ ſpirali; at ſi numerus ſectorum (prout ibi ſupponitur) ſupponatur infinitus, erunt adhuc omniũ ſectorum arcus ſimul ſumpti, æquales ſemiſſi arcus circuli contermini, nempe contermini figuræ ex his infinitis ſectoribus conflatæ, qui tamen vel ille ipſe eſt cum contermino veræ ſpirali, vel ipſo ſaltem infinite-exigua ſui parte (hoc eſt, nihilo,) minor. Si vero pro ſectoribus inſcriptis ſumantur circumſcripti, arcus circuli contermini erit una ſui parte augendus (ſive finita ſive infinita, pro numero ſectorum) ut ipſius ſemiſſis æqualis habeatur omnibus ſectorum arcubus ſimul ſumptis, adeoq; ſupponendus eſt incepiſſe uno gradu ante initium veræ ſpiralis, ut primi ſectoris arcus ſit o: nam in arithmetice proportionalibus, niſi primus terminus ſit o, aggregatum omnium non erit æquale ſemiſſi ultimi

timi in numerum terminorum ducti.

Quod autem de his figuris ostensum est, intelligendum erit (mutatis mutandis) de quibusvis aliis, nempe numerum terminorum (si ab 0 incipiatur) esse unitate majorem quam est numerus differentiarum, sive particularum ex quibus maximus constat; (sive æquales sint illæ differentiæ sive inæquales;) adeoq; si adscriptæ figuræ (sive sit inscripta sive circũscripta) basis sumatur æqualis basi figuræ propositę cui adscribitur (sive continuando inscriptã uno gradu infra basin, vel circumscriptã uno gradu supra verticem) erit istius altitudo una parte major quam altitudo hujus, (sive pars illa finita sit sive infinita;) ubi autem numerus partium altitudinis hujus supponitur ∞, erit in illa $\infty + 1$; vel si hujus altitudo A, erit illius $A + \frac{1}{\infty} A$, si illius A (quod nos ponere solemus) erit hujus $A - \frac{1}{\infty} A$, quod tamen (in infinitis) tantundem valet ob differentiam infinite parvam.

Dum vero differentiam infinitè parvam, pro nulla habendam dicimus: caute hoc accipiendum est; neq; enim id ubiq; obtinet, sed aliquando lapsui occasionem præbet. Cum enim infinite parvum infinities multiplicatur, assurgit nonnunquam quantitas satis magna, nempe illa ipsa cujus illa fuit aliquota pars utut infinite parva: Nam $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$ & $\frac{1}{\infty} A \times \infty = A$.



Ensum-

Exſemplum oſtendimus in Schol. prop. 13. Si enim (in fig. 1 & 2) concluderet quis, quoniam infinitorum parallelogrammorum latera (rectam VB conſtituentia) & trapeziorum latera (complentia rectam VS) ſigillatim ſumpta non niſi differentiâ infinitè parvâ ab invicem differant (cum tam hæc quam illa ſint infinite parva, quippe $\frac{1}{\infty}$ rectarum VB, VS,) eam igitur contemnendam eſſe, ipſaq; parallelogrammorum atq; trapeziorũ latera dicenda æqualia, & propterea (cum ex æqualium æqualibus additione aggregata ſint æqualia) infinita hæc infinitis illis æqualia, hoc eſt, totam VS, æqualem eſſe toti VB: manifeſtus eſſet paralogiſmus, (in quem tamen lapſus eſt admodum proclivis, ni caveatur:) Quamvis enim differentiæ ſint ſigillatim infinite-parvæ, (nempe $\frac{1}{\infty}$ VS $-$ $\frac{1}{\infty}$ VB) omnium tamen (numero infinitorum) aggregatum ſat notabilem habet magnitudinem, nempe VS $-$ VB.

At interim eadem parallelogramma atq; trapezia (ſi aream ſpectemus) non modo ſigillatim ſumpta differentiam habent infinitè parvam; ſed & eorum aggregatum & aggregatum horum (hoc eſt infinita illa parallelogramma ſimul ſumpta, atq; infinita hæc trapezia) differentiâ non niſi infinite parvâ ab invicem differunt: quod de ipſorum lateribus non obtinet.

Diſcriminis ratio hæc eſt: Quoniam ubi de lateribus comparandis agitur, quamvis in binis quibuſlibet reſpective ſumptis differentia minor eſt quo major eſt omnium numerus, at in eadem ſemper ratione qua ſingulæ differentiæ minuuntur, differentiarum numerus augetur; adeoq; differentiarum aggregatum dividendo non minuitur. At ubi de areis agitur, non modo binorum (trapezii & parallelogrammi) reſpective ſumptorum differentiæ ſingulæ minuuntur ſed & omnium aggregatum; & quidem quo plures ſint differentiæ eò minus eſt omnium aggregatum, donec tandem non modo a ſingulis ſingula, (quod demonſtraſſe non ſufficeret) ſed & ab omnibus omnia differant ſpacio infinite-parvo, ut ex demonſtrationibus liquet. Atq; hæc aliquanto fuſius notaſſe operæ pretium duxi, quoniam hic loci nonnullos lapſui proclives animadverti.

Ne autem hinc aliquid periculi quis ſuſpicetur dum nos altitudinem figuræ cujuſlibet accuratam, atq; eandem aliquota ſui parte infinite-parva auctam, perinde habemus: hoc unum ſat ſecuros reddat, quod, cæteris paribus, auctio altitu-

dinis figuræ cujuslibet (sive planæ sive solidæ) non nisi in eadem ratione auget ipsius aream sive magnitudinem; adeoq; ubi altitudinis augmentum est non nisi aliquota sui parte infinite-parva, erit etiam totius figuræ non nisi in eadem ratione auctio, hoc est aliquota parte sui infinite parva, sive $\frac{1}{\infty}$ totius figuræ; quod (cum non infinities, sed semel tantum sumatur) omni assignabili spacio minus erit, adeoq; pro nullo habendum.

Sin tandem quæratur, cur ego figurarum inscriptionem, potius quam circumscriptionem, eligerim; adeoq; ab o potius quam ab 1, ubiq; fere inchoaverim? præsertim cum figura circumscripta (non uno gradu supra verticem continuata, ut ab o incipiat, sed potius ab 1) eandem habeat præcise & basin & altitudinem cum ea cui adscribitur, sive in serie primanorum, sive secundanorum, aut aliorum sequentium; item sive finita sit sive infinita series?

Dicimus: Posse quidem id quod agimus utrovis modo fieri, nempe vel per figurarum inscriptionem vel circumscriptionem (quod & supra monuimus ad prop. 43. quæ toti huic Scholio ansam dedit, cujus quidem pars magna tradi citius non potuit, ut quæ a propositione proxime præcedente dependeat,(adeoq; verbi gratia, series primanorum indifferenter designari, per 1, 2, 3, &c. vel per 0, 1, 2, &c. nam terminus primus o reliquorum quantitati nihil addit. Et quidem ego jam olim utroq; modo lemmata mea ordinaveram, ut ut alterutrum demonstrationibus nostris sufficeret, quapropter lectorem utroq; onerandum non censui; præsertim cum ego Series Infinitas maxime spectabam, finitis vix aliter quam lemmatum instar ad infinitorum theoremata usus.

At interim figuræ circumscriptæ, si res accuratius perpendatur, non magis congruunt figuris illis quibus circumscribuntur, quam inscriptæ: Nam verbi gratia, inscripta cum exposita congruit altitudine & verticis latitudine, sed quoad basin (hoc est latitudinem in imo) differt; eadem inscripta uno infra basin gradu continuata (vel circumscripta sic continuata supra verticem) convenit expositæ quoad basin & verticis latitudinem sed quoad altitudinem differt; circumscripta vero (non continuata) convenit quidem expositæ quoad basin & altitudinem, sed non quoad latitudinem verticis, quippe in altera est o in altera 1.

Cum

Cum itaq; admodum se indifferenter habebant ad negotium nostrum figuræ inscriptæ & circumscriptæ; mallem ego series nostras ab o quam ab 1 inchoare: partim quod illud, utut inscriptionem potius referre videatur, utrisq; tamen accommodari possit, (ut jam dictum est,) prout vel supra verticem vel infra basin supponatur continuari: partim quod hoc pacto (propter minimi termini nullitatem) extremorum aggregatum idem sit atq; terminus maximus: præsertim vero ut possim, sine longo verborum ambitu, seriei primanorum appellatione comprehendere non modo 0, 1, 2, 3, &c, sed & 0, 2, 4, 6, &c, vel 0, 3, 6, 9, &c, vel 0, 4, 8, 12, &c, similesq; alias ab o inchoatas quicunq; sit terminus secundus; & sub serie secundanorum nomine, non modo 0, 1, 4, 9, &c. sed & 0, 2, 8, 18, &c, vel 0, 3, 12, 27, &c. similesq; : & pariter in seriebus sequentibus.

Siquis autem mallet ab 1, series inchoare, poterit ad hunc modum lemmata ordinare.

Ad seriem primanorum;

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2}{3+3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3}{4+4+4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3+4}{5+5+5+5}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3+4+5}{6+6+6+6+6}=\frac{1}{2}$$

&c. &c.

Aut etiam,

$$\frac{0+1}{2+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \qquad \frac{1+2}{2+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+2}{3+3+3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6} \qquad \frac{1+2+3}{3+3+3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+2+3}{4+4+4+4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8} \qquad \frac{1+2+3+4}{4+4+4+4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{5+5+5+5+5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{10} \qquad \frac{1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

&c. &c.

Ad feriem Secundanorum;

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad \frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12} \qquad \frac{1+4}{9+9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{18}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18} \qquad \frac{1+4+9}{16+16+16}=\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24} \qquad \frac{1+4+9+16}{25+25+25+25}=\frac{1}{3}-\frac{1}{30}$$

&c. &c.

Aut etiam

$$\frac{0+1}{4+4}=\frac{1}{3}-\frac{5}{24} \qquad \frac{1+4}{4+4}=\frac{1}{3}+\frac{7}{24}$$

$$\frac{0+1+4}{9+9+9}=\frac{1}{3}-\frac{12}{81} \qquad \frac{1+4+9}{9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{15}{81}$$

$$\frac{0+1+4+9}{16+16+16+16}=\frac{1}{3}-\frac{22}{192} \qquad \frac{1+4+9+16}{16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{26}{192}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}-\frac{35}{375} \qquad \frac{1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25}=+\frac{40}{375}$$

&c. &c.

Ad

Ad feriem Tertianorum.

$\frac{0+1}{1+1} \frac{1}{4} = +\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

$\frac{0+1+8}{8+8+8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{1+8}{27+27} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$

$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ $\qquad$ $\frac{0+1+8+27}{64+64+64+64} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$

$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ $\qquad$ $\frac{1+8+27+64}{125+125+125+125} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20}$

&c. $\qquad$ &c.

Et fimiliter ad feries fequentes, quibus recenfendis abftineo ne fim prolixus. Poterit, fi lubet, lector non magno negotio vel hæc ipfa lemmata in theoremata formare, vel alia his fimilia fequentibus feriebus aptare, fi ad ea quæ jam tradidimus attenderit.

Sed & alius adhuc eft (fi varietate lector delectetur) feries has ordinandi modus, qui etiam aliquando non minus erit accommodus: Si nempe nec ab o (ut in figuris infcriptis) nec ab 1 (ut in figuris circumfcriptis) fed ab intermedia quantitate, puta $\frac{1}{2}$, feries inchoetur, (adeoq; figuram reprefentet quæ infcriptæ & circumfcriptæ eft intermedia, five major quam infcripta & minor quam circumfcripta.) Ut fit, verbi gratia, feries primanorum $\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$ &c. vel (quod eodem recidit) $1+3+5+7$ &c. Quo cafu lemma fic erit ordinandum, pro ferie primanorum.

$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}}{2+2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3}{4+4} = \frac{1}{2}$

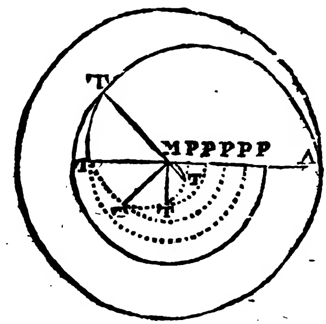
$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}{3+3+3} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3+5}{6+6+6} = \frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}}{4+4+4+4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3+5+7}{8+8+8+8} = \frac{1}{2}$

&c. $\qquad$ &c.

Atq;

Atq; hic quidem modus omnium optime convenit prop. 15, 16, ubi figuram Spirali adjacentem cum Parabolica comparamus. Nam si, in figura spirali, ductis quotlibet rectis MT angulos facientibus continuos invicem æquales, si in singulis spacies sectores inscribi supponantur, erunt eorum arcus, ut 0, 1, 2, 3, &c; sin circumscribi, ut 1, 2, 3, 4, &c; si vero ita abscribi ut sectorum arcus a spirali bisecentur, erunt ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c, vel ut 1, 3, 5, 7, &c. (nempe ut differentiæ numerorum quadraticorum:) adeoq; si arcus illi (sive numero infiniti sive finiti, quamvis ibidem de infinitis tantummodo verba facta sint, adeoq; hanc curiositatem illic omittendam duxerim,) supponantur in rectum extendi & invicem continuari, ut fiant totidem segmenta diametri parabolæ (continue posita;) unde evadant diametri interceptæ 1, 4, 9, 16, &c. (nam $1+3=4$, $1+3+5=9$; &c;) quibus conveniant ordinatim-applicatæ (quippe in diametrorum ratione subduplicata) quæ erunt ad invicem, ut 1, 2, 3, 4, &c, hoc est ut ipsæ rectæ MT, MT, &c, in figura spirali vera per similium sectorum terminos transeuntes.



Atq; hoc pacto comparare licet, non modo figuram ex sectoribus numero infinitis (quod nos illic fecimus) sed etiam ex numero finitis conflatam, spirali adjacentem, cum figura ex totidem parallelogrammis adjacente parabolæ. Quod quidem (sine nova figura) satis intelligi poterit. Si illi sectorum arcus ponantur $1a, 3a, 5a$, &c; radii vero (ipsis proportionales) $2r, 6r, 10r$, &c; erunt sectores $1ar, 9ar, 25ar$, &c. (nempe semisses parallelogrammorũ radiis & arcubus respectivis contentorũ.) Sumptis item in parabolæ diametro continuis segmentis $1a, 3a, 5a$, &c. adeoq; diametris interceptis $1a, 4a, (=1a+3a,) 9a (=4a+5a)$ &c, & ordinatim-applicatis quæ illis diametris conveniant (in diametrorum ratione subduplicata) $2r, 4r, 6r$, &c, (quæ spacia abscindant non æque alta, sed quorum altitudines sint arithmetice proportionales, ut 1, 3, 5, &c. ut patet;) parallelogramma spaciis illis inscripta erunt $1a \times 0r$, $3a \times 2r$,

$5\,a \times 4\,r$, &c, vel $0\,ar$, $6\,ar$, $20\,ar$, &c; circumscripta, erunt $1\,a \times 2\,r$, $3\,a + 4\,r$, $5\,a \times 6\,r$, &c, vel $2\,ar$, $12\,ar$, $30\,ar$, &c; his autem intermedia partim inscripta partim circumscripta (quæ nempe eam habent latudinem quæ est arithmeticè media inter duas ordinatim-applicatas spatium terminantes) vel (quod tantundem valebit) inscripta trapezia, erunt $1\,a \times 1\,r$, $3\,a \times 3\,r$, $5\,a \times 5\,r$, &c, vel $1\,ar$, $9\,ar$, $25\,ar$, &c, expositis sectoribus sigillatim æqualia: iis nempe quorum arcus sunt parallelogrammorum altitudinibus (hoc est, segmentis diametri parabolæ) æquales, radii vero latitudinum parallelogrammorum dupli: vel, si sectorum radii sint parallelogrammorum illorum latitudinibus æquales, erunt parallelogramma sectorum dupla.

Sed tempus est ut prolixo Scholio finem imponam; quod, cur in hunc locum rejecerim, supra dictum est.

PROP. CLXXXIII. *Theorema.*

LAtus numeri Figurati cujuslibet, in qualibet serie Tabellæ expositæ (prop. 132.) quousq; libet continuandæ; ad suum illum numerum Figuratum; rationem habet cognitam.

Nempe eam quam indicat prop. præced.

PROP. CLXXXIV. *Theorema.*

ET *propterea*, Series sequentes in præmissa tabella quousq; libet continuata, non erit difficile interpolare.

Nempe, invento per prop. 182, cujusq; proprio charactere, fiat interpolatio ut in prop. 175, 176, 181.

Tabella vero, ut dictum est, interpolata sic se exhibebit.

Numeri

		Monadici.		Laterales.		Triangulares.		Pyramidales.		Trian: pyram.	
	∞	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{105}{384}$	
Monadici	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	$\square$	$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{9}{48}$		$2\frac{177}{384}$	
Laterales.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	l
		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$	
Triangulares	$\frac{1}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{3}{8}$	15	$\frac{l^2+l}{2}$
		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{177}{384}$	
Pyramidales	$\frac{15}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{48}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{19}{48}$	35	$\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$
				$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{19}{48}$		$50\frac{105}{384}$	
Triangulipyram.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	1	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{105}{384}$	126	$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$

Vel aliter expeditus. Postquam per prop. 170, 175. &c. interpolatio serierum tam transversarum quam erectarum aliquousq; incepta est, licet eam ulterius continuare quousq; libet sola additione numerorum jam inventorum; nam non modo numeri tabellæ prop. 132. (prout ibidem monuimus) sed & qui interpolatione immiscentur, fiunt ex duobus aliis additis, altero superius altero ad sinistram, (non quidem proximis, ut in prop. 132. sed, propter loca jam interpolata,) post unum locum interjectum positis Ut animadvertenti patebit.

Quod autem de interpolatione unius in singulis spaciis loci, in propositionibus aliquot præcedentibus jam dictum est, etiam ad duorum vel trium pluriumve interpositionem, mutatis mutandis, facile accommodari poterunt.

SCHOLIUM.

Notandum hic, totum hoc interpolationis negotium, huc usq; præstitum, perfici posse (etiam sine inventis cujusq; seriei propriis characteribus) ope monitorum quæ habentur in Scholiis prop. 126. & 154. Interpolatis nempe primo seriebus erectis, & istis deinde interpolationibus in series item transversas relatis. Verum cum singularum serierum characteres investigare, res esset non injucunda, & lectori forsan non ingrata: placuit ea potius quam habetis methodo incedere.

Cum autem huc perventum est, patet, intercalatione facta in singulis seriebus tam erectis quam transversis Tabellæ prop. 132. novas jam emersisse series ipsis interpositas: nondum tamen completas, sed hiantes. Et quidem locus ille (nota □ insignitus) quem quam maxime suppletum vellem, manet adhuc vacuus. Si autem vel unus ex vacuis illis locis suppleri datum sit, & reliqui non difficulter suppleri poterunt; ut ex prop. 188. deinceps patebit.

Cum vero Tabella prop. 132. jam habetur novis seriebus interpolata, ut interjectæ series suos habeant titulos juxta tenorem illius tabellæ accommodatos, observanda est hæc sequens Propositio.

PROP. CLXXXV. *Theorema.*

SI seriebus Tabellæ prop. 132. novæ interſerantur ſeries, ut ſuum quæq; debitum ſortiatur titulum; obſervandi ſunt indices poteſtatum illic appoſitarum; eæq; poteſtates ſunt interponendæ quarum indices cum illarum indicibus debitam analogiam retinent.

Puta, cum poteſtates, in ſummitate Tabellæ iſtius, repertæ indices habeant, 0, 1, 2, 3, 4 &c. interpolatione unius loci ubivis jam facta, poteſtatum apponendarum indices erunt $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4. &c.

Item cum poteſtatum illic ad marginem appoſitarum indices ſint $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ſeu $\frac{2}{0}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{8}$, &c. poteſtatum jam appoſitarum indices erunt $-\frac{2}{1}$, $\frac{2}{0}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{8}$, &c (vel pro $-\frac{2}{1}$, ſubſtituas, $-\frac{2}{1}$, vel $-\frac{2}{1}$, vel -2, tantundem enim valent.)

Adeoq; Tabella illa jam interpolata ſic ſe habebit.

Si infinita ſeries Æqualium mulctetur analoga ſerie Primanorum, vel Secundanorum, aut Tertianorum, &c. Reſidua, eorumq; Quadrata, Cubi, &c. eam rationem habebunt ad Æqualium ſeriem congruam, quam habet unitas ad numeros Tabellæ ſequentis. Nempe

Seriei

Seriei æqualium multatæ serie

	Recip. √q Resid.	Æqualia.	√q Residuorum	Residua.	√q. Cuborum.	Quadrata.	√q. Quintan.	Cubi.	√q. Septiman.	Biquadrata.
Recipr: Quadrat.	∞	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{105}{384}$
Nullâ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Quadratorum.		1	□	$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{9}{48}$		$2\frac{177}{384}$
Primanorum.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
Quadr. Subtert.		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$
Subſecundanor.	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{3}{8}$	15
Qu: Subquintan.		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{177}{384}$
Subtertianorum.	$\frac{15}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{48}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{39}{48}$	35
Q: Subſeptiman.		1		$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{19}{48}$		$50\frac{105}{384}$
Subquartanor.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	15	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{105}{384}$	70

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

SCHOLIA.

Atq; hic jam notare licet alteram etiam ſeriem earum quarum in Scholiis prop. 165 & 168. nempe eam quam prop. 118 & 121 prius tradideram, etiam in hâc ipſa Tabella inexſpectatò prodire: in ſerie nempe tranſverſa tertia.

PROP. CLXXXVI. *Theorema.*

Hinc patet, quod Series infinita radicum univerſalium, ad ſeriem totidem Æqualium, rationem habere poteſt ſatis explicabilem.

Nempe per Tabellam prop. præced. erit.

$\sqrt{q}$ Resid.	Residua	$\sqrt{q}$ Cuborum.
$\sqrt{u}: \sqrt{R} - \sqrt{a}:$	$\sqrt{R} - \sqrt{a}$	$\sqrt{u}: \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^2 a} + 3\sqrt{R a^2} - \sqrt{a^3}:$
$\sqrt{u}: \sqrt{R} - \sqrt{b}:$	$\sqrt{R} - \sqrt{b}$	$\sqrt{u}: \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^2 b} + 3\sqrt{R b^2} - \sqrt{b^3}:$
$\sqrt{u}: \sqrt{R} - \sqrt{c}:$	$\sqrt{R} - \sqrt{c}$	$\sqrt{u}: \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^2 c} + 3\sqrt{R c^2} - \sqrt{c^3}:$
&c. ad	&c ad	&c usq; ad
$\sqrt{}: \sqrt{R} - \sqrt{R}:$	$\sqrt{R} - \sqrt{R}$	$\sqrt{u}: \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^3} + 3\sqrt{R^3} - \sqrt{R^3}:$
$\frac{8}{15} A \sqrt{qq} R$	$\frac{1}{3} A \sqrt{R}$	$\frac{8}{15} A \sqrt{qq} R^3$

$\sqrt{q}$ Residuorum.	Residua	$\sqrt{q}$. Cuborum.
$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a}$	$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2 a} + 3\sqrt[3]{R a^2} - \sqrt[3]{a^3}:$
$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{b}:$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2 b} + 3\sqrt[3]{R b^2} - \sqrt[3]{b^3}:$
$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{c}:$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{c}$	$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2 c} + 3\sqrt[3]{R c^2} - \sqrt[3]{c^3}:$
&c ad	&c ad	&c usq; ad
$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R}:$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R}$	$\sqrt{u}: \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2 R} + 3\sqrt[3]{R R^2} + \sqrt[3]{R^3}:$
$\frac{48}{105} A \sqrt[6]{R}$	$\frac{1}{4} A \sqrt[3]{R}$	$\frac{48}{315} A \sqrt[6]{R^3} = \frac{48}{315} A \sqrt{R}$
vel $\frac{16}{35} A \sqrt[6]{R}$		$\frac{16}{105} A \sqrt[6]{R^3} = \frac{16}{105} A \sqrt{R}$

Et pari modo in quibusvis aliis istius Tabellæ seriebus in quibus interpolatio perfecta est.

Adeoq; nihil deest ad idem in reliquis seriebus perficiendum (& speciatim ad quadrandum circulum) nisi ut methodus supplendi loca vacua reperiatur, vel (quod eodem recidit) ut seriearum istarum proprius character inveniatur. Et quidem quamvis non obvium sit interpositarum serierum characteres invenire, tamen, quam habent illi ad invicem rationem, ex prop. seq. innotescet: ut si qua possimus arte eorum unum invenire, statim invenientur & reliqui.

PROP.

PROP. CLXXXVII. *Theorema.*

IN Tabella prop. 184. Ut, posito seriei secundæ, hoc est, parium primæ, charactere 1, reliquarum ex paribus characteres fiunt continuâ multiplicatione numerorum $1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4}$ &c. (ut dictum est prop. 178.) vel (quod tantundem valet) $1 \times \frac{2l}{2} \times \frac{2l+2}{4} \times \frac{2l+4}{6} \times \frac{2l+6}{8}$ &c. sic, posito seriei primæ (imparium) charactere A, reliquarum ex imparibus characteres fiunt continuâ multiplicatione numerorum $A \times \frac{2l-1}{1} \times \frac{2l+1}{3} \times \frac{2l+3}{5} \times \frac{2l+5}{7}$ &c. Adeoq; ex horum uno cognito innotescent statim & reliqui.

Nam id postulat analogia progressionis Arithmeticæ, quæ & in Numeratoribus & in Denominatoribus conspicitur. Atq; id ipsum comprobat inductio locorum omnium qui complentur; ut non sit dubium quin & idem de vacuis credendum sit.

Adeoq; ex imparium characteribus, uno cognito innotescent etiam & reliqui.

PROP. CLXXXVIII. *Theorema.*

IN singulis seriebus Tabellæ prop. 184. Si primus terminus dicatur A, secundus (hoc est, primus parium,) 1. Reliqui omnes ejusdem seriei (tam pares quam impares) fiunt continua multiplicatione numerorum sequentium. Nempe

Impares

	Impares.	Pares.
In prima	$A \times \frac{0 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \ \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c.}$	$1 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \ \&c}$
In secund.	$A \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c.}$	$1 \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \ \&c}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \ \&c}$
In tertia	$A \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \ 10 \ \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c.}$	$1 \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \ \&c}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \ \&c}$
In quarta	$A \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \ \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c.}$	$1 \times \frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \ \&c}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \ \&c}$
In quinta	$A \times \frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \ \&c}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c.}$	$1 \times \frac{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \ \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \ \&c.}$
In sexta	$A \times \frac{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \ \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c.}$	$1 \times \frac{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \ \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \ \&c.}$
In septim.	$A \times \frac{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \ \&c}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c}$	$1 \times \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \ \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \ \&c.}$
In octava	$A \times \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \ \&c}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c.}$	$1 \times \frac{8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16 \ \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \ \&c.}$

Et sic deinceps.

Probabitur hæc ex præcedente. Vel etiam (ut præcedens) ex analogia progressionis Arithmeticæ Et quidem inductione comprobatur in locis omnibus repletis; ut non sit dubium quin idem de vacuis etiam credendum sit.

Si quis autem hæsitat de imparibus seriei primæ, (quos aio fieri ex continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{0 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \ \&c}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c}$) nempe, ne o ciphra quæ istic conspicitur, totam continuam multiplicationem, quantacunq; fuerit, penitus destruat, faciatq; omnes istius seriei terminos evanescere in o ciphram seu Nihil: Sciendum est, inde huic malo cautum esse quod terminus A in ista serie sit ∞ Infinitum (prout superius ostendimus in Scholiis ad prop. 166.) adeoq; nisi sequeretur o (ad ipsius ∞ vires minuendas) excrevissent omnes istius seriei termini in ∞ Infinitum. Sed eorum alterum alterius malo medetur commode. Quamvis enim $\infty \times 0$ non aliquem

quem determinate numerum designet (et propterea nihil inde certi de reliquis quantitatibus concludi possit,) potest tamen quasi virtualiter cujusvis numeri vices subire. Nam quicunq; numerus per ∞ dividatur, quotientem dabit o, et contra. Puta $\infty)1(0.0)1(\infty.\infty)2(0.0)2(\infty.\infty)3(0.0)3(\infty.$ Et sic de quovis alio: Et propterea (cum *Divisor* in *Quotientem* ductus restituere debeat numerum *Dividendum*) esset $\infty \times 0 = 1$, vel $\infty \times 0 = 2$, vel $\infty \times 0 = 3$; Et sic de quovis alio numero.

PROP. CLXXXIX. *Theorema.*

H*Inc sequitur, quod* Si ex Tabellæ prop. 184. locis vacuis unus quilibet numero noto suppleatur, erunt & reliqui omnes cogniti.

Verbi gratiâ; si numerus hâc notâ □ designatus supponatur cognitus, reliqui omnes etiam cognoscentur; qui nempe eam habent ad illum rationem quæ hic subtus indigitatur.

∞	1	$\frac{1}{2}$□	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$□	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}$□	$\frac{15}{48}$	$\frac{8}{35}$□	$\frac{105}{384}$	A
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$□	1	□	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$□	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}$□	$\frac{105}{48}$	$\frac{64}{35}$□	$\frac{945}{384}$	$A \times \frac{2l-1}{1}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$l = \frac{2l+0}{2}$
$\frac{1}{3}$□	1	$\frac{4}{3}$□	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$□	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}$□	$\frac{315}{48}$	$\frac{128}{21}$□	$\frac{3465}{384}$	$A \times \frac{4l^2-1}{3}$
$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	$\frac{99}{8}$	15	$\frac{l^2+l}{2} = \frac{4l^2+4l}{8}$
$\frac{4}{15}$□	1	$\frac{8}{5}$□	$\frac{7}{2}$	$\frac{64}{15}$□	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}$□	$\frac{693}{48}$	$\frac{512}{35}$□	$\frac{9009}{384}$	$A \times \frac{8l^3+12l^2-2l-3}{15}$
$\frac{15}{48}$	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20	$\frac{1287}{48}$	35	$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} = \frac{8l^3+24l^2+16l}{48}$
$\frac{8}{35}$□	1	$\frac{64}{35}$□	$\frac{9}{2}$	$\frac{128}{21}$□	$\frac{99}{8}$	$\frac{512}{35}$□	$\frac{1287}{48}$	$\frac{1024}{35}$□	$\frac{19305}{384}$	$A \times \frac{16l^4+64l^3+56l^2-16l-15}{105}$
$\frac{105}{384}$	1	$\frac{945}{384}$	5	$\frac{3465}{384}$	15	$\frac{9009}{384}$	35	$\frac{19305}{384}$	70	$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24} = \frac{16l^4+96l^3+176l^2+96l}{384}$

Totus processus demonstratur ex prop. præced.

Notandum autem & hic numerum quemvis intermedium aggregatum esse ex duobus altero sursum altero ad dextram (non proximis, sed post unum intermissum,) positis.

Cujusq; seriei characterem (quatenus per prop. 181 innotescit,) libuit etiam adjungere, quo melius perspiciat lector quousq; rem perduximus.

SCHOLIUM.

Atq; hactenus quidem rem perduxisse videamur satis feliciter. Verum hic tandem hæret aqua. Neq; enim video quo pacto possim vel quantitatem □ reperire, vel characterem seriei A. (Et propterea, nec characteres serierum imparium penitus assequi, licet eorum ad invicem rationes cognoscantur; nec imparium serierum locos impares, quamvis & horum etiam cognoscantur quas habent ad invicem rationes.) Quanquam enim si numeri laterales sint integri, puta 1, 2, 3, 4, &c. nota erit quantitas A, puta 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{105}{48}$, &c. non tamen facile est deprehendere quo pacto horum numerorum ad suos respectivè numeros laterales ratio possit unâ aliqua æquatione explicari: unde & reliquis lateribus (locorum imparium) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. accommodari possit sua quantitas A. Quanquam enim hinc spes non exigua visa est affulsisse, lubricus tamen quem præ manibus habemus Proteus tam hic quam superius non raro elapsus, spem fefellit. Quem autem & hic comprimendi vultum ostenderit, non erit fortassis ingratum apposuisse. Nempe ----

PROP. CLXXXX. *Theorema.*

IN serie quarta, (sive parium secunda,) cujus numeri alternè sumpti (in locis paribus) 1, 2, 3, 4, 5, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum seu rationum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4}$, &c. seu $1 \times \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6} \times \frac{10}{8}$ &c; & , (in locis imparibus,) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. ex multiplicatione $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{7}$, &c. Si, propter intercalationem unius in singulis spaciis numeri, (ut ex locis tam paribus quam imparibus intermistis una fiat series,) quælibet rationum, in quas continue multiplicatur terminus tam

parium

parium quam imparium primus, in binas dirimenda eſt, (nam, verbi gratia, ratio 1 ad 2 compoſita eſt ex ratione 1 ad $1\frac{1}{2}$ ad $1\frac{1}{2}$ ad 2,) hoc modo

$$\overbrace{\tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{1}}^{1} \times \overbrace{\tfrac{3}{2} \times \tfrac{4}{3}}^{\frac{4}{2}} \times \overbrace{\tfrac{5}{4} \times \tfrac{6}{5}}^{\frac{6}{4}} \times \overbrace{\tfrac{7}{6} \times \tfrac{8}{7}}^{\frac{8}{6}} \times \tfrac{9}{8} \quad \&c.$$

$$\tfrac{1}{2} \times \underbrace{\tfrac{2}{1} \times \tfrac{3}{2}}_{\frac{3}{1}} \times \underbrace{\tfrac{4}{3} \times \tfrac{5}{4}}_{\frac{5}{3}} \times \underbrace{\tfrac{6}{5} \times \tfrac{7}{6}}_{\frac{7}{5}} \times \underbrace{\tfrac{8}{7} \times \tfrac{9}{8}}_{\frac{9}{7}}$$

In ſerie ſexta, (ſive, parium tertia,) ſi idem faciendum ſit; diſtribuenda eſt quælibet ratio item in binas, ſed quarum utraq; eſt ex duabus compoſita; ad hunc modum.

$$\overbrace{\frac{1\times3}{2\times4} \times \frac{2\times4}{1\times3}}^{1} \times \overbrace{\frac{3\times5}{2\times4} \times \frac{4\times6}{3\times5}}^{\frac{6}{2}} \times \overbrace{\frac{5\times7}{4\times6} \times \frac{6\times8}{5\times7}}^{\frac{8}{4}} \times \overbrace{\frac{7\times9}{6\times8} \times \frac{8\times10}{7\times9}}^{\frac{10}{6}} \quad \&c.$$

$$\frac{3}{8} \times \underbrace{\frac{2\times4}{1\times3} \times \frac{3\times5}{2\times4}}_{\frac{5}{1}} \times \underbrace{\frac{4\times6}{3\times5} \times \frac{5\times7}{4\times6}}_{\frac{7}{3}} \times \underbrace{\frac{6\times8}{5\times7} \times \frac{7\times9}{6\times8}}_{\frac{9}{5}} \quad \&c.$$

Nempe, diviſa prius quâlibet ratione in quaternas, (puta $\frac{6}{2} = \frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$, et $\frac{7}{3} = \frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$. Et ſic in cæteris) & tum diſtributione alternatim facta in binas claſſes.

In ſerie Octava (ſive parium quarta) diſtribuenda eſt quælibet ratio item in binas, ſed quarum utraq; eſt ex ternis compoſita; ſic.

$$\overbrace{\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6} \times \frac{2\times4\times6}{1\times3\times5}}^{1} \times \overbrace{\frac{3\times5\times7}{2\times4\times6} \times \frac{4\times6\times8}{3\times5\times7}}^{\frac{8}{2}} \times \overbrace{\frac{5\times7\times9}{4\times6\times8} \times \frac{6\times8\times10}{5\times7\times9}}^{\frac{10}{4}} \quad \&c.$$

$$\frac{15}{48} \times \underbrace{\frac{2\times4\times6}{1\times3\times5} \times \frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}}_{\frac{7}{1}} \times \underbrace{\frac{4\times6\times8}{3\times5\times7} \times \frac{5\times7\times9}{4\times6\times8}}_{\frac{9}{3}} \quad \&c.$$

Nempe, diviſa prius qualibet ratione in ſenas, (puta

$\frac{8}{2} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$, & $\frac{9}{3} = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$, &c.) quæ poſtea diſtribuenda ſunt alternatim in duas claſſes.

Et ſimiliter in ſerie Decima, Duodecima, &c. dividenda quælibet ratio in Octonas, Denas, &c. quæ alternatim diſtribuendæ ſunt in duas claſſes.

(In ſerie autem Secunda (ſive parium Prima) nulla rationum diviſione opus eſt, ſed cum omnes ſint eadem æqualitatis ratio, ſive $\frac{1}{1}$; eadem illa eſt & ubiq; interponenda, nam $\frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$.)

Verum ſi in ſeriebus Imparibus illud aggrediamur; nempe ut quælibet ratio in duas (æquabiliter progrediendo) diſtribuatur; res non ita feliciter ſuccedit.

Nam (verbi gratia) cum (ex analogia reliquarum) rationes ſeriei Quintæ dividendæ eſſent in ternas, Septimæ in quinas, &c. (numero ſemper impares,) non poteſt fieri iſta æquabilis earum diſtributio in duas claſſes quæ ad debitam interpolationem requiritur.

Tota propoſitio (inſpecta Tabella) ſatis per ſe patet animadvertenti.

Res aliquanto clarius fortaſſe patebit ubi ſerierum aliquot rationes in binas, ternas, quaternas, &c. (prout ſeries quælibet poſtulat) diviſero. Nempe

In ſerie tertia.		In ſerie quarta.	
	$\frac{2}{1} = \frac{2}{1}$		$\frac{3}{1} = \frac{2 \times 3}{1 \times 2}$
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$		$\frac{4}{2} = \frac{3 \times 4}{2 \times 3}$	
	$\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$		$\frac{5}{3} = \frac{4 \times 5}{3 \times 4}$
$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$		$\frac{6}{4} = \frac{5 \times 6}{4 \times 5}$	
	$\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$		$\frac{7}{5} = \frac{6 \times 7}{5 \times 6}$
$\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$		$\frac{8}{6} = \frac{7 \times 8}{6 \times 7}$	
	$\frac{8}{7} = \frac{8}{7}$		$\frac{9}{7} = \frac{8 \times 9}{7 \times 8}$
$\frac{9}{8} = \frac{9}{8}$		$\frac{10}{8} = \frac{9 \times 10}{8 \times 9}$	

In serie quinta.

$$\frac{5}{2} = \frac{3\times4\times5}{2\times3\times4} \qquad \frac{4}{1} = \frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{5\times6\times7}{4\times5\times6} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4\times5\times6}{3\times4\times5}$$

$$\frac{9}{6} = \frac{7\times8\times9}{6\times7\times8} \qquad \frac{8}{5} = \frac{6\times7\times8}{5\times6\times7}$$

$$\frac{11}{8} = \frac{9\times10\times11}{8\times9\times10} \qquad \frac{10}{7} = \frac{8\times9\ 10}{7\times8\times9}$$

In serie sexta.

$$\frac{6}{2} = \frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5} \qquad \frac{5}{1} = \frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{5\times6\times7\times8}{4\times5\times6\times7} \qquad \frac{7}{3} = \frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{7\times8\times9\times10}{6\times7\times8\times9} \qquad \frac{9}{5} = \frac{6\times7\times8\times9}{5\times6\times7\times8}$$

$$\frac{12}{8} = \frac{9\times10\times11\times12}{8\times9\times10\times11} \qquad \frac{11}{7} = \frac{8\times9\times10\times11}{7\times8\times9\times10}$$

In serie septima.

$$\frac{7}{2} = \frac{3\times4\times5\times6\times7}{2\times3\times4\times5\times6} \qquad \frac{6}{1} = \frac{2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{5\times6\times7\times8\times9}{4\times5\times6\times7\times8} \qquad \frac{8}{3} = \frac{4\times5\times6\times7\times8}{3\times4\times5\times6\times7}$$

$$\frac{11}{6} = \frac{7\times8\times9\times10\times11}{6\times7\times8\times9\times10} \qquad \frac{10}{5} = \frac{6\times7\times8\times9\times10}{5\times6\times7\times8\times9}$$

$$\frac{13}{8} = \frac{9\times10\times11\times12\times13}{8\times9\times10\times11\times12} \qquad \frac{12}{7} = \frac{8\times9\times10\times11\times12}{7\times8\times9\times10\times11}$$

In seriebus hisce (quantumlibet continuatis) et sequentibus omnibus, notandum est, Rationes cujuslibet ex paribus seriei dividi in alias numero pares, quæ propterea commode distribui possunt (ut dictum est) in duas Classes: cujuslibet autem ex seriebus imparibus, rationes dividi in alias numero impares, quæ propterea sic distribui non possunt.

SCHOLIUM.

Si quis autem putet huic malo medelam satis commode applicari posse, dividendo rationes seriei quintæ, septimæ, &c. (non in ternas, quinas, &c. sed) in senas, denas, &c. (nempe bis ternas, bis quinas, &c.) ut ita rationes (jam numero pares) distribui possint in binas classes: Res neutiquam ex voto succedet. Nam hoc quidem tantundem est acsi Rationes seriei quartæ, sextæ, octavæ, &c, dividantur (non in binas, quaternas, senas, &c, sed) in quaternas, octonas, duodenas, &c. Et harum postea fiat alternatim distributio in duas classes. Quod quidem

si fieret, non ipsæ prodirent rationes quæsitæ, (quas supra exhibuimus,) sed aliæ ab ipsis satis diversæ, ut experienti patebit.

Et quidem proclivis sum ut credam (quod et ab initio suspicatus sum,) rationem illam quam quærimus talem esse quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera surda; (quale quid innuit Schotenius, de radicibus Æquationum quarundam cubicarum, in ipsius *Appendice* ad tractatum *de Organica Conicarum Sectionum descriptione*, idq; ad mentem Vietæi, Cartesii, & aliorum:) ut necesse videatur alium ejusmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per latera surda.

Atq; hæc quidem nostra sive sententia, sive conjectura hinc confirmari videtur; Quoniam, si, ut scrierum parium quælibet (in Tabella prop. 184) suum habet appositum characterem, ita & imparium quælibet ejusmodi characterem nacta esset: tum, ut per characteres parium, rationem investigari docuimus quam habet series finita Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. ad seriem totidem eorum maximo Æqualium, (in Scholiis ad prop. 182) ita per ejusmodi characteres serierum imparium, similiter investiganda videretur ratio quam habet finita series Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. ad seriem totidem horum maximo Æqualium: cur autem hoc non sperandum sit, ostendimus in Scholiis ad prop. 165.

Et propterea quod in aliis Arithmetices negotiis fieri solet; illud & hic faciendum erit: nempe, ubi ad ἀδύνατον aliquid pervenitur, quod quidem fieri supponendum est, nec tamen actu fieri potest; excogitant modum aliquem exprimendi id quod fieri supponitur utut factum non sit.

Atq; hoc quidem in Arithmeticis operationibus omnibus resolutoriis usu venit. v. g. In subductione; si proponitur numerus major ex minori auferendus, puta 3 ex 2, vel 2 ex 1; quoniam id actu præstari non potest, excogitantur numeri negativi quibus exprimatur ejusmodi supposititia subductio, puta, $2 - 3$, vel $1 - 2$, vel $- 1$.

In divisione; si proponatur numerus per alium dividendus qui ipsum non metitur, puta 3 per 2; cum hoc actu præstari non

non possit, inventus est modus ejusmodi suppositit iam divisionem indicandi ad hanc formam $\frac{3}{2}$, vel $1\frac{1}{2}$.

In extractione Radicum; si proponatur numerus resolvendus qui non sit sui generis vere figuratus; verbi gratia, si quæratur radix quadratica numeri 12, quoniam radix illa non potest ullis numeris sive integris sive fractis exponi, ideo inventa est methodus ejusmodi Radicem suppositit iam utcunq; indicandi ad hanc formam, $\sqrt{12}$, vel $2\sqrt{3}$.

Pariter, in Progressione Geometrica, puta 3, 6, 12, &c. Si quæratur terminus novus inter 3 & 6 interponendus, dicetur ille $3\sqrt{2}$ vel $\sqrt{18}$ vel $\sqrt{:3\times 6:}$ vel forte (quod tantundem valet) $\sqrt{:2\times 9:}$ quod idem est atq; explicatius dicere, *terminus medius inter 3 & 6 in progressione* 3, 6, 12, &c. aut *inter 2 & 9 in progressione* 2, 9, $40\frac{1}{2}$ &c. Ita si inter 3, 6, interponendi essent duo medii Geometrici, esset eorum prior $\sqrt{c:3\times 3\times 6:}$ vel $\sqrt{c\,54}$ vel potius $3\sqrt{c\,2}$, (nempe 3 ducti in radicem cubicam communis rationis 2) et sic in cæteris.

Si autem Progressio Geometrica, quæ supponitur fieri ex continua multiplicatione primi termini in numeros quotlibet invicem æquales, (puta 3, 6, 12, 24, &c.) ex continua multiplicatione $3\times 2\times 2\times 2$ &c.) non semper admittat terminos intermedios rationales: non mirandum est si neq; illud contingat in progressione facta ex termini primi continua multiplicatione in quotlibet succedentes numeros inæquales, sive crescentes sive decrescentes; (puta 1, 2, 6, 24, &c. ex continue multiplicatis $1\times 2\times 3\times 4$ &c; vel 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{105}{48}$, &c. ex continuè multiplicatis $1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}$, &c.

Quoties autem hoc contingit, cum illud veris numeris designari non possit (& ne quidem solis radicibus surdis) quærendus erit modus aliquis id ipsum utcunq; exprimendi. Si igitur ut $\sqrt{:3\times 6:}$ significat *terminum medium inter 3 & 6 in progressione Geometrica æquabili* 3, 6, 12, &c. (continue multiplicando $3\times 2\times 2$ &c.) ita $\mathfrak{m}:1\,|\,\frac{1}{2}:$ significet *terminum medium inter 1 & $\frac{3}{2}$ in progressione Geometrica decrescente* 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, &c. (continue multiplicando $1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}$ &c.) erit $\square = \mathfrak{m}:1\,|\,\frac{1}{2}:$ Et propterea *circulus est ad quadratum diametri, ut 1 ad* $\mathfrak{m}:1\,|\,\frac{1}{2}$. Quæ quidem erit vera circuli quadratura in numeris, quatenus ipsa numerorum natura patitur, explicata.

Et quidem, sicut in progressione Geometrica æquabili, 3, 12, 48,

48, &c. quanquam qui terminum inter 3 & 12 intermedium dicit $\sqrt{:3 \times 12:}$ non dicendus erit rem satis explicasse, quoniam terminus ille explicatius dici possit 6 (est enim $\sqrt{:3 \times 12:} = \sqrt{36} = 6:$) attamen qui inter 3 & 6 (in progressione 3, 6, 12, &c.) terminum assignat intermedium $\sqrt{:3 \times 6:}$ (vel saltem $\sqrt{18}$, aut $3\sqrt{2}$,) rem satis explicasse dicendus erit, quoniam non potest in vero numero assignari: Ita qui in progressione 1, $\frac{15}{8}$, $\frac{945}{384}$, &c, terminum inter 1 et $\frac{15}{8}$ intermedium dicit $\sqcap : 1 | \frac{15}{8}$: non satis explicate rem tradit, dicere enim potuisset $\frac{3}{2}$; At qui inter 1 et $\frac{3}{2}$ medium terminum assignat $\sqcap : 1 | \frac{3}{2}$: satis rem explicasse dicendus est, cum iste terminus non possit veris numeris exprimi: adeoq; sufficit si utcunq; indicetur.

Atq; insuper, ut $\sqrt{:3 \times 6:}$ (in progressione 3, 6, 12, &c.) vel $\sqrt{18}$, vel $3\sqrt{2}$, quamvis veris numeris explicari non potest accurate, potest tamen quam proxime designari; (puta major quam $4|24$, minor tamen quam $4|25$; item major quam $4|2426$, minor quam $4|2427$; item major quam $4|242639$, minor quam $4|242640$; et sic deinceps) ita et numerus $\square = \sqcap : 1 | \frac{3}{2}$: designari potest veris numeris quam proxime, licet non accurate; puta major quam $1|27$, minor tamen quam $1|28$; item major quam $1|2732$, et minor quam $1|2733$; item major quam $1|273239$, et minor quam $1|273240$; et sic deinceps, prout vel ex tabella nostra (quod sequente propositione ostensurus sum) vel etiam aliunde variis modis colligi potest.

Adeo ut nihil videam cur non ratio circuli ad quadratum circumscriptum (vel etiam Ellipseos ad circumscriptum parallelogrammum) nempe ut 1 ad $\square = \sqcap : 1 | \frac{3}{2}$: vel $\square = 1 \sqcap \frac{3}{2}$. (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 et $\frac{3}{2}$ in progressione 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$ &c,) æque τεχνικῶς explicari dicenda sit, atq; ratio lateris ad diagonium in quadrato, nempe ut 1 ad $1\sqrt{2}$ vel ad $\sqrt{:1 \times 2:}$ (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 et 2 in progressione 1, 2, 4, &c.) nisi quod hæc notatio $\sqrt{2}$ vel $\sqrt{:1 \times 2:}$ jamdiu fuerit recepta (sed quæ aliquando fuit nova;) nostra vero jam primitus introducta, propter novum progressionis genus jam primum (quod sciam) detectum. Sicut autem notatio numeri surdi (puta $\sqrt{2}$ &c.) in Arithmeticam introduxit methodum addendi, subducendi, multiplicandi, dividendi, &c. latera surda; ita non erit difficile ejusmodi

modi operationes ad novum hunc nostrum notationis modum applicare; quod tamen præsentis instituti non est. Non ignoro interim ad hanc ipsam notationem accuratius perficiendam, apponendas esse notæ $\pi\!\!\!\!\sim$ distinctiones suas, puta $\pi\!\!\!\!\sim^{2}$, $\pi\!\!\!\!\sim^{3}$, $\pi\!\!\!\!\sim^{4}$, &c, prout indicaverit vel medium unicum, vel primum duorum, trium, &c; sicut & notæ $\surd$ fieri solet, puta $\surd^{2}$, $\surd^{3}$, $\surd^{4}$, &c, prout designat radicem quadraticam, vel cubicam, biquadraticam, &c, hoc est, vel unicum, vel primum duorum, trium, &c. mediorum proportionalium: Item alias apponendas esse distinctiones quæ indicent, an continui multiplicationes (in exposita serie interpolanda) vel unitate, vel numero binario, ternario, &c. continue crescant. Verum ea omnia, & siqua sunt similia, remittenda sunt ad accuratiorem hujusce progressionis disquisitionem si illam in Arithmeticam admittendam sentiant Mathematici, (quod quo minus fiat nihil video.) Præsenti sufficit instituto illud quod volumus utcunq; indicare, & quod in charactere deficit apertis verbis supplere. Si autem notationis modus ille a nobis excogitatus Mathematicis minus placuerit; ego quam lubentissime illum mutari patiar modo aptiorem ostendant.

Ut ut sit: Ego quidem necesse habeo ut fatear, me nec ejusmodi pro seriebus imparibus quales pro paribus in Tabella, characteres; nec serierum imparium locos impares, adhuc supplere posse, juxta aliquem (quem adhuc receptum scio) notationis modum; (quanquam eorum ad invicem rationes jam ostenderim.) Et quanquam in superioribus, per avia non raro, et tramites nulli quod sciam antea calcatas perrumpens, insperatos exitus aliquoties invenerim: vix tamen (ob causas jam expositas) ausim sperare, & hic item ex voto omnia successura. Si forsan alius aliquis nostra dehinc premens vestigia eo tandem perveniat quo mihi non datum est pervenire, (nollem enim pro nostri modulo aliorum item omnium ingeniis terminos indicere,) & modos magis accommodos eidem quantitati exprimendæ invenerit, ego neutiquam gravatim feram. Mathematicis interim haud ingratum fore autumo me novam aliquam nec (si quid ego judico) prorsus contemnendam, obscuro satis de circuli quadratura problemati, lucem præbuisse; eamq; eatenus numeris explicasse quatenus ipsa numerorum natura ferat.

Quod autem jam invenimus, libet etiam, in sequentibus aliquot propositionibus, mutata aliquantulum forma proponere. Et primo quidem qui id possit numeris absolutis quam proxime designari, & deinde etiam lineis rectis.

PROP. CLXXXXI. *Problema.*

PRopositum sit inquirere, quantus sit terminus $\square$ (tabellæ prop. 189.) in numeris absolutis quam proxime.

Quo facilius res succedat; progressionis (ibidem repertæ) termini $\frac{1}{2}\square$. 1. $\square$. $\frac{3}{2}$. $\frac{4}{3}\square$. $\frac{3\times5}{2\times4}$. $\frac{4\times6}{3\times5}\square$. $\frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}$. &c.
dicantur, α. a. β. b. γ. c. δ. d. &c.
Est autem $1.2::\alpha.\beta$. Et $2.3::a.b$. Et $3.4::\beta.\gamma$. Et $4.5::b.c$. Et $5.6::\gamma.\delta$. Et $6.7::c.d$. &c.

Hoc est, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}$, $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$, $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{4}{3}$, $\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$, $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{6}{5}$, $\frac{d}{c}=\frac{7}{6}$, &c.

Ideoq; (cum rationes continue multiplicantes perpetuo decrescant) erit

$$\frac{\beta}{a}\begin{cases}\text{minor duarum} & \frac{a}{\alpha}\times\frac{\beta}{a}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}\\ \text{major duarum} & \frac{\beta}{a}\times\frac{b}{\beta}=\frac{b}{a}=\frac{3}{2}.\end{cases}\ \text{Ideoq;}\begin{cases}\text{minor quam } \sqrt{\frac{2}{1}}=\sqrt{1\frac{1}{1}}.\\ \text{major quam } \sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{1\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

$$\text{Et propterea } \beta=a\times\frac{\beta}{a}=\square\begin{cases}\text{minor quam } 1\sqrt{2}=1\sqrt{1\frac{1}{1}}.\\ \text{major quam } 1\sqrt{\frac{3}{2}}=1\sqrt{1\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

$$\text{Item } \frac{\gamma}{b}\begin{cases}\text{minor duarū} & \frac{b}{\beta}\times\frac{\gamma}{b}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{4}{3}\\ \text{major duarū} & \frac{\gamma}{b}\times\frac{c}{\gamma}=\frac{c}{b}=\frac{5}{4}.\end{cases}\ \text{Ideoq;}\begin{cases}\text{minor quam } \sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{1\frac{1}{3}}.\\ \text{major quam } \sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{1\frac{1}{4}}.\end{cases}$$

Et

Et propterea $b \times \frac{\gamma}{b} = \gamma = \frac{4}{3}\,\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3}{2} \times \sqrt{1\frac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{3}{2} \times \sqrt{1\frac{1}{4}}. \end{cases}$

Hoc est, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \times \sqrt{1\frac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \times \sqrt{1\frac{1}{4}}. \end{cases}$

Et (pari ratione) erit $\delta = c \times \frac{\delta}{c} = \frac{4 \times 6}{3 \times 5}\,\square \begin{cases} \text{minor quã } \frac{3 \times 5}{2 \times 4} \times \sqrt{1\frac{1}{5}}. \\ \text{major quã } \frac{3 \times 5}{2 \times 4} \times \sqrt{1\frac{1}{6}}. \end{cases}$

Hoc est, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6} \sqrt{1\frac{1}{5}}. \\ \text{major quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6} \sqrt{1\frac{1}{6}}. \end{cases}$

Et (continuata ejusmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

$$\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14} \times \sqrt{1\frac{1}{13}}. \\ \text{major quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14} \times \sqrt{1\frac{1}{14}}. \end{cases}$$

Et sic deinceps quousq; libet. Ita nempe ut fractionis Numerator fiat continue multiplicando numeros impares 3, 5, 7, &c. bis positos; Denominator vero, continue multiplicando numeros pares, 2, 4, 6, &c, bis item positos, exceptis primo & ultimo, qui semel ponuntur: Et tota deniq; ratio seu fractio, sic facta, ducatur in Radicem-quadraticam Unitatis aliquotâ-parte sui auctæ; eâ nempe quæ denominatorem habet eum qui est ultimus numerorum, continue multiplicatorum, imparium, si quæramus numerum justo majorem, vel parium, si justo minorem.

Atq; hoc pacto eousq; tandem pervenietur donec majoris & minoris differentia evadat quavis assignata minor; (quæ propterea, si supponatur in infinitum continuanda operatio, tan-

dem evanitura est.) Quod quidem, si opus sit, sic demonstrabitur.

Numerorum, ita ut jam dictum est, continuè multiplicatorum, parium maximus (nempe, ex denominatoris factoribus ultimus) dicatur z; adeoq; imparium maximus (nempe, ultimus ex factoribus Numeratoris,) erit $z - 1$, (quippe qui ab isto unitate deficit.) Erit igitur (propter eundem utrobiq; multiplicatorem compositum) numerus justo major ad numerum justo minorem ut $\sqrt{1 \frac{1}{z-1}}$ ad $\sqrt{1 \frac{1}{z}}$, (nempe, ut terminalis numerus surdus in illo ad terminalem numerum surdum in hoc,) hoc est, ut $\sqrt{\frac{z}{z-1}}$ ad $\sqrt{\frac{z+1}{z}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{z^2}{z-1}}$ ad $\sqrt{:z+1:}$ hoc est, ut $\sqrt{z^2} = z$ ad $\sqrt{:z^2-1}$. Fieri autem potest (aucta nempe, quantum opus est, quantitate z) ut differentia radicum $\sqrt{z^2}$ & $\sqrt{:z^2-1:}$ nempe $z - \sqrt{:z^2-1:}$ minor evadat quâvis assignanda, (ut notum est, & alibi etiam a nobis dictum ad prop. 39. Con. Sect.) Et propterea numerus justo major excedat numerum justo minorem, secundum eam rationem quæ minor sit quavis assignata. Quod erat ostendendum.

Cum autem, ut ex dictis patet, aucto in infinitum numero z, numerus justo major numerum justo minorem eâ ratione superet quæ minor sit quavis assignata: erit eorum ab invicem differentia (& propterea utriusvis a justo) infinite parva, hoc est, nulla.

Porro; Quoniam, numero z sic in infinitum aucto, illa Unitati adjuncta pars sui aliquota, futura est infinite parva; erit, sive $\sqrt{1 \frac{1}{z}}$, sive $\sqrt{1 \frac{1}{z-1}}$, tantundem atq; $\sqrt{1}$, sive 1, (propter evanescentem partem infinite parvam,) quæ multiplicando nihil mutat: Dicimus, fractionem illam $\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \&c.}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \&c.}$ in infinitum continuatam, esse ipsissimum quæsitum numerum $\square$ præcise; ad quem ita se habet 1, ut circulus ad Quadratum diametri: Vel, (si id magis placeat,) ut est istius fractionis Denominator ad Numeratorem, sic esse dicimus circulum ad

diametri

diametri Quadratum: Et, ut Numerator ille ad Denominatorem, sic Quadratum illud ad Circulum.

Si quis autem curiosius inquirat, quousq; continuanda erit illa multiplicatio-continua, ut tandem ad differentiam datam, sive ipsa minorem perveniatur: Nempe ut numerus justo major, numerum justo minorem, ipsius parte quamlibet exigua (vel ne illâ quidem) superet: Id hoc modo investigabitur.

Quantitas major dicatur m, minor n, sitq; earum differentia, istius pars quantumvis exigua; puta $\frac{a}{b}m = m - n$; & quæratur quousq; continuanda erit operatio, hoc est, quis futurus est numerus z multiplicatorum maximus, ut illa differentia (vel saltem ipsâ minor) prodeat.

Quoniam igitur $m - n = \frac{a}{b}m$, erit $n = m - \frac{a}{b}m$; & $m.n :: m.m - \frac{a}{b}m :: \frac{b}{b}m.\frac{b-a}{b}m :: b.b-a :: z.\sqrt{:z^2-1}$. (per modo demonstrata.) Ideoq; $b\sqrt{:z^2-1:} = bz - az$. Et (utrinq; quadrando) $b^2z^2 - b^2 = b^2z^2 + a^2z^2 - 2abz^2$. Atq; (delendo utrinq; b^2z^2, & reliqua transponendo,) $2abz^2 - a^2z^2 = b^2$. Et deniq; (utrinq; dividendo) $z^2 = \frac{b^2}{2ab - a^2}$. Hujus igitur numeri radix quadratica, (si fuerit numerus par,) vel saltem, (sive fractus vel surdus sit vel numerus impar) par numerus illa proxime major, futurus est multiplicatorum maximus, ut assignata differentia, vel ipsa saltem minor, proveniat. quod erat investigandum.

Idem Aliter.

Post hanc autem nostram, ipsius quantitatis □ designationem; libet etiam aliam subjungere, quam a Nobilissimo Viro, atq; acutissimo simul Geometra, Dom. Guliel. Vicecon, & Barone *Brouncher*, accepi.

Cum illi progressionum aliquot mearum proposuerim, & qua lege procederent indicaverim, id interim rogans, ut qua forma quantitatem illam commode designandam putaverit, indi-

cares; Nobilissimus Vir ille, re apud se perpensa, methodo item Infinitorum sibi peculiari quantitatem ad hanc formam commodissime designandam judicavit.

$$\square = 1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}\frac{81}{2}\ \&c. \qquad \left(= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \&c.}}}}}\right)$$

Nempe si unitati adjungatur fractio, quæ denominatorem habeat continuè fractum; ea lege, ut particularium fractionum Numeratores sint 1, 9, 25, &c. numeri quadratici imparium 1, 3, 5, &c. Denominator vero ubiq; 2 cum adjuncta fractione, & sic in infinitum. Hoc simul addito, ut, ubicunq; tandem placeat consistere, pro ultimo numero 2 cum fractione deinceps insecuturâ, ponatur horum aliquis (prout locus ubi consistitur postulaverit) 3, 5, 7, 9, &c. (deinceps ab 1, numero integro, arithmetice proportionalium;) nempe si in primo loco sistatur, 3; si in secundo, 5; si in tertio, 7; & sic deinceps; posito numeri qui locum denominat duplo unitate aucto. Atq; hoc pacto, si in fractionis loco impari sistatur, prodibit numerus justo major; sin pari, justo minor. Quo longius autem procedatur eo propius utrinq; ad numerum justum acceditur.

$1.$ justo minor.

$1\frac{1}{3}$. justo major.

$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{5}}$. justo minor.

$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{7}}}$. major.

$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{9}}}}$ minor.

Atq; ad eandem formam numeros reliquos tabellæ nostræ quæsitos designavit; aliasq; ex progressionibus nostris, iis in exposita tabella similes, interpolavit. Totum vero illius methodi processum aperire, longius esset quam ut hic inseratur. Sperabam autem aliquando fore ut id ipsum ab illo in formam digestum publice exhibeatur.

SCHOLIUM.

Quum vero Nobilissimo Viro difficilius persuasum iri video ut illud ipse suscipere velit: conabor ego rem illam ad ipsius mentem, quam possim proxime, breviter exhibere.

Animadvertit siquidem Nobilissimus Vir, numeros duos impares continue proximos, si invicem ducantur, rectangulum facere, quod quadrato intermedii numeri paris sit unitate minus

(puta

(puta $1 \times 3 = 3 = 4 - 1 = Q2 - 1$. $3 \times 5 = 15 = 16 - 1 = Q4 - 1$. &c.) Et similiter duos pares proxime positos rectangulum facere quod unitate minus sit quam quadratum intermedii numeri imparis, (puta $0 \times 2 = 0 = 1 - 1 = Q1 - 1$. $2 \times 4 = 8 = 9 - 1 = Q3 - 1$. $4 \times 6 = 24 = 25 - 1 = Q5 - 1$. &c.) Quærebat igitur qua ratione augendi erant factores, ut prodirent rectangula, non quadratis illis unitate minutis, sed ipsis quadratis æqualia. Invenit autem id fieri posse, si utriq; factores fractione augeantur, quæ denominatorem haberet continue fractum in infinitum, ad eam formam quam superius exhibuimus: Nempe ut particularium fractionum Numeratores sint quadrata numerorum imparium. Denominator vero ubiq; integri duplus fractione auctus in infinitum. Ad hanc formam, quousq; libet continuandam.

$1 = Q1$ $\quad 9 = Q3$ $\quad 25 = Q5$ $\quad 49 = Q7$ $\quad 81 = Q9$

$0\frac{1}{0}\frac{9}{0}\frac{25}{0\&}$ $\quad 2\frac{1}{4}\frac{9}{4}\frac{25}{4\&}$ $\quad 4\frac{1}{8}\frac{9}{8}\frac{25}{8\&}$ $\quad 6\frac{1}{12}\frac{9}{12}\frac{25}{12\&}$ $\quad 8\frac{1}{16}\frac{9}{16}\frac{25}{16\&}$ $\quad 10\frac{1}{20}\frac{9}{20}\frac{25}{20\&}$

$1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2\&}$ $\quad 3\frac{1}{6}\frac{9}{6}\frac{25}{6\&}$ $\quad 5\frac{1}{10}\frac{9}{10}\frac{25}{10\&}$ $\quad 7\frac{1}{14}\frac{9}{14}\frac{25}{14\&}$ $\quad 9\frac{1}{18}\frac{9}{18}\frac{25}{18\&}$ $\quad 11\frac{1}{22}\frac{9}{22}\frac{25}{22\&}$

$4 = Q2$ $\quad 16 = Q4$ $\quad 36 = Q6$ $\quad 64 = Q8$ $\quad 100 = Q10$.

Factores autem illi sic constituti, quantumlibet continuati, (modo ne in infinitum,) rectangulum facient debito quadrato vel minus, si numerus fractionum integro adjunctarum sit par; vel majus si impar; ita tamen ut quo longius procedatur eo propius ad quadratum debitum accedat. Quod hac demonstratione confirmatur.

Esto, ex debitis factoribus quibusvis, prioris numerus integer F, adeoq; posterioris $F + 2$; numerus igitur interjectus (quod latus est quadrati) $F + 1$. Eorum rectangulum $Fq + 2F$ minus est quam hujus quadratum $Fq + 2F + 1$.

Jam adjungatur utriq; factori fractio una; factores igitur

$F\frac{1}{2F}$, $F + 2 + \frac{1}{2F + 4}$, constituent rectangulum

$\frac{4Fqq + 16Fc + 20Fq + 8F + 9}{4Fq + 8F}$, quod majus erit quam

qua-

quadratum $Fq + 2F + 1 = \frac{4Fqq + 16Fc + 20Fq + 8F}{4Fq + 1F}$.

Adjungantur deinde fractiones binæ; Fractiones emergentes $F\frac{1}{2F}\frac{0}{2F}$, $F + 2 + \frac{1}{2F + 4 +}\frac{9}{2F + 4}$, constituent rectangulũ

$$\frac{4Fc + 11F}{4Fq + 9} \times \frac{4Fc + 24Fq + 59F + 54}{4Fq + 16F + 25} =$$

$$\frac{16Fcc + 96Fcq + 280Fqq + 480Fc + 649Fq + 564F}{16Fqq + 64Fc + 136Fq + 144F + 225}$$

quod minus est quam quadratum $Fq + 2F + 1 =$

$$\frac{16Fcc + 96Fcq + 280Fqq + 480Fc + 644Fq + 594F + 225}{16Fqq + 64Fc + 136Fq + 144F + 225}$$

Et sic quousq; procedatur, prodibit rectangulum quod erit nunc minus nunc majus (alternis vicibus) quam expositum quadratum, (quæ tamen differentia perpetuo minuitur, ut patet,) quod erat demonstrandum.

His autem sic inventis; poterunt illa ad series nostras ita accommodari, ut inde innotescant termini in tabella desiderati juxta hunc notationis modum designandi.

Exsempli gratia; Tabellæ nostræ series prima componitur, (ut supra ostensum est) in locis imparibus, ex continua multiplicatione. $A \times \frac{0}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$ &c. vel $A \times \frac{0}{2} \times \frac{4}{6} \times \frac{8}{10} \times \frac{12}{14}$ &c. Et in locis paribus $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{2}{4} \times \frac{6}{8} \times \frac{10}{12} \times \frac{14}{16}$ &c. Hoc est

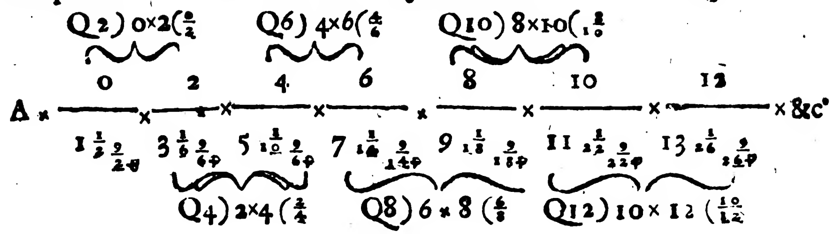
$0 \times 2)\ Q0\ (\frac{0}{2}$ $\quad 4 \times 6)\ Q4\ (\frac{4}{6}$ $\quad 8 \times 10)\ Q8\ (\frac{8}{10}$

$$A \times \frac{-1\,\frac{1}{2}\,\frac{9}{2}}{0} \times \frac{+1\,\frac{1}{2}\,\frac{9}{24}}{2} \times \frac{3\,\frac{1}{6}\,\frac{9}{64}}{4} \times \frac{5\,\frac{1}{10}\,\frac{9}{104}}{6} \times \frac{7\,\frac{1}{14}\,\frac{9}{144}}{8} \times \frac{9\,\frac{1}{18}\,\frac{9}{184}}{10} \times \frac{11\,\frac{1}{22}\,\frac{9}{224}}{12} \times \text{\&c.}$$

$2 \times 4)\ Q2\ (\frac{2}{4}$ $\quad 6 \times 8)\ Q6\ (\frac{6}{8}$ $\quad 10 \times 12)\ Q10\ (\frac{10}{12}$

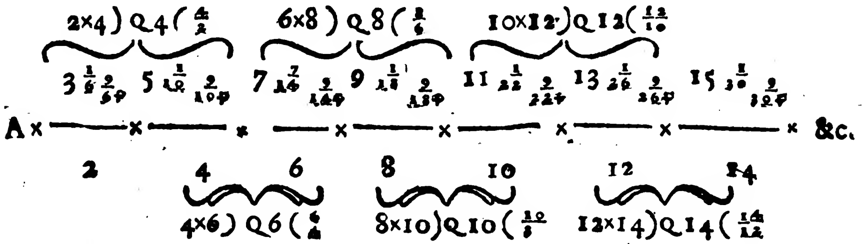
Vel etiam, (quod eodem plane recidit,) ad hanc formam,

A ×



Utrovis modo, rationes quibus numeri vel paribus vel imparibus locis ponendi constituuntur, resolvi possunt in binas (ut patet) quibus constituantur numeri locis continuis ponendi; numeris nempe locorum tum parium tum imparium in unam seriem interpolatione mutua redactis.

Similiter in serie tertia, cujus numeri in locis imparibus positi, constituuntur ex continue multiplicatis $A \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7}$ &c. vel $A \times \frac{4}{2} \times \frac{8}{6} \times \frac{12}{10} \times \frac{16}{14}$ &c. Et locis paribus $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{6}{4} \times \frac{10}{8} \times \frac{14}{12} \times \frac{18}{16}$ &c. Hoc est



Atq; hæc quidem abunde sufficiant ad omnes tabellæ nostræ numeros complendos, cum jam supra ostensum sit prop. 188. uno aliquo desideratorum invento reliquos statim innotescere. Si quis tamen cupiat, ut nos seriei primæ & tertiæ rationes resolvimus, ita & reliquarum serierum rationes item resolutas habere: poterit quidem & illud fieri, ita tamen ut in serie quarta (hoc est, post unitatum seriem secunda) erit rationum prodeuntium quælibet bimembris, in quinta trimembris, & sic deinceps.

Nempe, in quarta, ad hanc formam

$$A\times\overbrace{\frac{3\frac{1}{6}\frac{9}{64}\times5\frac{1}{10}\frac{9}{104}}{2\times4}\times\frac{5\frac{1}{10}\frac{9}{104}\times7\frac{1}{14}\frac{9}{144}}{4\times6}}^{2\times4\times4\times6)\,Q:\,4\times6:\,(\frac{6}{2}=\frac{3}{1}}$$

$$\underbrace{\frac{5\frac{1}{10}\frac{9}{104}\times7\frac{1}{14}\frac{9}{144}}{4\times6}\times\frac{7\frac{1}{14}\frac{9}{144}\times9\frac{1}{18}\frac{9}{184}}{6\times8}}_{4\times6\times6\times8)\,Q:\,6\times8:\,(\frac{8}{4}=\frac{4}{2}}$$

$$\overbrace{\frac{7\frac{1}{14}\frac{9}{144}\times9\frac{1}{18}\frac{9}{184}}{6\times8}\times\frac{9\frac{1}{18}\frac{9}{184}\times11\frac{1}{22}\frac{9}{224}}{8\times10}}^{6\times8\times8\times10)\,Q:\,8\times10:\,(\frac{10}{6}=\frac{5}{3}}\;\&c.$$

In ſerie quinta, ad hanc formam.

$$A\times\overbrace{\frac{3\frac{1}{6}\frac{9}{64}\times5\frac{1}{10}\frac{9}{104}\times7\frac{1}{14}\frac{9}{144}}{2\times4\times6}\times\frac{5\frac{1}{10}\frac{9}{104}\times7\frac{1}{14}\frac{1}{144}\times9\frac{1}{18}\frac{9}{184}}{4\times6\times8}}^{2\times4\times6\times4\times6\times8)\,Q:\,4\times6\times8:\,(\frac{8}{2}=\frac{4}{1}}\;\&c.$$

$$\underbrace{\frac{5\frac{1}{10}\frac{9}{104}\times7\frac{1}{14}\frac{1}{144}\times9\frac{1}{18}\frac{9}{184}}{4\times6\times8}\;\&c.}_{4\times6\times8\times6\times8\times10)\,Q:\,6\times8\times10:\,(\frac{10}{4}=\frac{5}{2}}$$

Et ſimiliter in ſequentibus ſeriebus. Nempe ſingulæ rationes ſeriei quartæ, quintæ, ſextæ &c. componuntur ex ſeriei tertiæ rationibus binis, ternis, quaternis, &c.

Cum autem in ſingulis his rationum jam inventarum ſeriebus (ex quarum continuo ductu conſtituuntur Tabellæ noſtræ numeri) commodum videatur ut in variis formis exhiberi poſſint, & (prout opus videbitur) ab una in aliam transformari quo melius (aliarum fractionum inſtar) operationes arithmeticas ſuſcipiant: Poteſt & id commode fieri per ea quæ in hujus Scholii initio tradita ſunt. Nempe, reſolutis (ut ibidem docetur) quadratis numerorum parium in rectangulorum illis æqualium latera illic indicata, notentur ſingula (ob commodiorem proceſſum) ſuis ſymbolis, hoc modo,

Q2 | Q4 | Q6 | Q8 | Q10 | Q12 | Q14 | Q16								
□	B	C	D	E	F	G	H	I
$1\frac{1}{2}\,\frac{2}{24}$	$3\frac{1}{6}\,\frac{2}{64}$	$5\frac{1}{10}\,\frac{2}{104}$	$7\frac{1}{14}\,\frac{2}{144}$	$9\frac{1}{18}\,\frac{2}{184}$	$11\frac{1}{22}\,\frac{2}{224}$	$13\frac{1}{26}\,\frac{2}{264}$	$15\frac{1}{30}\,\frac{2}{304}$	$17\frac{1}{34}\,\frac{2}{344}$
		$\frac{4}{1}$□	$\frac{9}{4}$B	$\frac{16}{9}$C	$\frac{25}{16}$D	$\frac{36}{25}$E	$\frac{49}{36}$F	$\frac{64}{49}$G
				$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}$□	$\frac{9}{4}\times\frac{25}{16}$B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$C	$\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$D	$\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$E
						$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$□	$\frac{9}{4}\times\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$D
								$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$□

Cum enim sit □B = Q2 = 4, & BC = Q4 = 16:
Erit 4 . 16 :: □B . BC :: □ . C = $\frac{16}{4}$□ = 4□;
Et $\frac{1}{4}$C = □. Item □)4(B, & B)4(□.
Et similiter in locis reliquis.

 Adeoq;

Adeoq; cum rationes nuper inventæ, ſint in ſerie

prima $A \times \frac{0}{1\frac{1}{2}\frac{2}{2\square}} \times \frac{2}{3\frac{1}{6}\frac{2}{6\square}} \times \frac{4}{5\frac{1}{10}\frac{2}{10\square}} \times \frac{6}{7\frac{1}{14}\frac{2}{14\square}} \times \frac{8}{9\frac{1}{18}\frac{2}{18\square}} \times \frac{10}{11\frac{1}{22}\frac{2}{22\square}} \times \frac{12}{13\frac{1}{26}\frac{2}{26\square}} \times$ &c.

hoc eſt $A \times \frac{0}{\square} \times \frac{2}{B} \times \frac{4}{C} \times \frac{6}{D} \times \frac{8}{E} \times \frac{10}{F} \times \frac{12}{G} \times$ &c.

ſecunda, $A \times \frac{2}{2} \times \frac{4}{4} \times \frac{6}{6} \times \frac{8}{8} \times \frac{10}{10} \times \frac{12}{12} \times$ &c.

tertia, $A \times \frac{B}{2} \times \frac{C}{4} \times \frac{D}{6} \times \frac{E}{8} \times \frac{F}{10} \times \frac{G}{12} \times \frac{H}{14} \times$ &c.

quarta, $A \times \frac{BC}{2\times4} \times \frac{CD}{4\times6} \times \frac{DE}{6\times8} \times \frac{EF}{8\times10} \times \frac{FG}{10\times12} \times \frac{GH}{12\times14} \times \frac{HI}{14\times16} \times$ &c

quinta, $A \times \frac{BCD}{2\times4\times6} \times \frac{CDE}{4\times6\times8} \times \frac{DEF}{6\times8\times10} \times \frac{EFG}{8\times10\times12} \times \frac{FGH}{10\times12\times14} \times \frac{GHI}{12\times14\times16} \times$ &c

Et ſic in cæteris: (ubi tamen intelligendum eſt A non eandem eſſe ubiq; quantitatem, ſed in ſerie prima $A = \infty$ vel potius $\infty\,\square$, in ſecunda $A = 1 = \infty\,\square \times \frac{0}{\square}$, in tertia $A = \frac{1}{2}\square = 1 \times \frac{2}{B}$, in quarta $A = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\square \times \frac{4}{C} = \frac{1}{2}\square \times \frac{1}{\square}$, in quinta $A = \frac{1}{3}\square = \frac{1}{2} \times \frac{6}{D} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}C = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6}\square$. Et ſic deinceps. Nam ſeries prima erecta, eadem eſt cum prima tranſverſa; ut ſupra liquet.) Poſſunt illæ, per æquipollentiam modo demonſtratam, ſic exhiberi, ut non niſi uno aliquo numerorum horum interminabilium opus ſit in ſingulis exprimendis; & ſæpe quidem ne uno; Exempli gratia, In ſerie quinta, ratio ſecunda $\frac{CDE}{4\times6\times8} = \frac{36E}{4\times6\times8} = \frac{64C}{4\times6\times8} = \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c. Hæc igitur ratio, quolibet modorũ illorum deſignata, ducta in iſtius ſeriei terminũ ſecundũ 1, (in tabella noſtra repertum) habetur terminus tertius, $1 \times \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c.

Tertius autem hic terminus, ductus in rationem ſequentem $\frac{DEF}{6\times8\times10} = \frac{64F}{6\times8\times10} = \frac{100D}{6\times8\times10} = \frac{900B}{1920} = \frac{15}{8\square} = \frac{15B}{32} = \frac{15}{2C} = \frac{5D}{24} = \frac{40}{3E}$ &c. Exhibebit ejuſdem ſeriei terminum quartum $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, eundem nempe quem exhibet

exhibet Tabella. (Sed & idem terminus pariter exhibebitur ex ductu secundi termini 1, in rationem ex secunda & tertia compositam.) Atq; ad hunc modum licebit singulos tabellæ nostræ terminos indicare, adhibito nonnunquam uno quovis, sæpius autem ne uno quidem, numerorum istorum interminabilium; quorum quidem nos primum, hac nota $\square$ designatum, in tabella nostra adhibuimus.

Est igitur ratio circuli ad quadratum diametri, (per jam dicta)

$$\tfrac{1}{4}pd.\,d^2 :: 1.\,\square = \frac{4}{B} = \frac{C}{4} = \frac{9}{D} = \frac{9E}{64} = \frac{225}{16F} = \frac{25G}{256}$$

&c. Et similiter (cum sit ratio perimetri ad diametrum quadrupla rationis circuli ad quadratum, quia nempe $\tfrac{1}{4}pd.\,d^2 : \tfrac{1}{4}p.\,d.$) ratio perimetri ad diametrum $p.\,d :: 4.\,\square$: & diametri ad perimetrum $d.\,p :: \square.\,4 ::$

$$:: 1.\ \frac{4}{\square} = B = \frac{16}{C} = \frac{4D}{9} = \frac{256}{9E} = \frac{64F}{225}\ \frac{1024}{25G}\ \text{\&c.}$$

Nempe ut 1 ad $\left\{\begin{array}{l}\square : \text{sic Circulus ad Quadratum Diametri.}\\ B : \text{sic Circuli Diameter ad Perimetrum.}\end{array}\right.$

Superest, ut rationem ostendam cur in assignando valorem quantitatis $\square$, superius dixerim, pro fractionis continue fractæ denominatore ultimo (ubicunq; sistendum quis velit) ponendum esse, non 2, sed vel, 3, 5, 7, 9, &c. prout locus ubi consistitur postulaverit. (quod non tam necessitatis, quam perspicuitatis causa factum est.) Quæ quidem ratio, hæc est.

Cum supponatur (juxta jam tradita) $\square \times B = Q2 = 4$. sitq; $\square = 1\frac{1}{2\frac{9}{2+}}$ & $B = 3\frac{1}{6\frac{9}{6+}}$. Adeoq; si numerum $4 = Q2$ dividamus per B (factorem posteriorem) prodibit $\square$. Si quantitas B imperfecte sumatur, non prodibit ipsa quantitas $\square$, sed alia quæ major sit vel minor, prout B imperfecte sumpta, sit ipsa B accurate, minor vel major. Nempe si pro divisore B sumatur 3, divisione facta, pro $\square$ prodibit $1\frac{1}{3}$: si pro divisore $3\frac{1}{6}$. prodibit $1\frac{1}{2\frac{9}{5}}$: si $3\frac{1}{6\frac{9}{6}}$; prodibit $1\frac{1}{2\frac{9}{2\frac{25}{7}}}$. Et sic deinceps: ut ex ipso calculo patebit.

Et sic in $B = 3\frac{1}{6+}$, $C = 5\frac{1}{10+}$, $D = 7\frac{1}{14+}$, &c. faciendum erit. Nempe in B, denominator ultimus erit unus ex his 5, 7, 9,

11, &c. (is nempe quem locus ubi sistitur postulaverit;) qui a 3 (numero integro unde quantitatis B designatio inchoatur) in progressione Arithmetica binario continue crescunt. Et similiter, in C, unus ex his 7, 9, 11, 13, &c: Et, in D, unus ex illis 9, 11, 13, 15, &c. (qui nempe illic a 5, hic a 7, in Arithmetica progressione continua, binario crescunt:) Et in sequentibus similiter: quod ipse calculus indicabit.

Adeoq; universaliter; in earum quantitatum qualibet designanda, (quocunq; tandem loco sistere libuerit,) pro denominatore ultimo sumendus erit numeri qui fractionum locum denominat duplus numero integro quæ designationem inchoat auctus.

Si quis autem quærat, cur in hoc processu (in denominatore ultimo designando) per factorem posteriorem potius quam priorem divisionem faciamus: Ratio est, quia sic res commodius procedit. Nam uti jam denominatores illi ab inchoante numero integro arithmetice procedunt crescendo; si per factorem priorem fieret divisio, denominatores illi ab inchoante numero integro retrocederent decrescendo, donec tandem perveniatur ad numeros negativos (qui designationem magis turbabunt) ut experimento facto patebit. Adeoq; ad illam legem, si (verbi gratia) designanda sit quantitas F, dividendo Q 10 = 100 per E, denominatores illi sic prodeuntes futuri sunt 9, 7, 5, 3, 1, − 1, &c. Si autem ad methodum priorem dividatur Q 12 = 144 per G, fuissent 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, &c. nempe a numero 11 illic decrescendo, hic crescendo: ubi autem hac methodo tota quantitas prodit justa major, illa prodibit etiam justâ major, & contra. Unde etiam patet, priorem illam methodum designandi ultimum denominatorem non modo minus turbatam, sed & magis accuratam esse, quam est posterior. Cum enim excessus & defectus sit semper penes ultimam fractionem (cujus nempe adjectione quantitas quæ prius erat justâ major fit justâ minor, aut contra,) ubi denominator est major (eodem manente numeratore) fractio minor est, adeoq; sive excessus sive defectus minor, quam si denominator ille fuisset major: adeoq; denominatorum illorum assumptio per continuum augmentum minuit, at quæ per continuum decrementum auget errorem. Quod quidem eousq; verum est, ut ne quidem illa nostra emendatio, quæ per continuum deno-

mina-

minatorum incrementum procedit, quicquam adfert commodi (sed incommodi potius ob dictam rationem,) donec eousq; procedatur ut denominator ille auctus major sit denominatore communi, (eo nempe qui æquatur duplo inchoantis numeri integri,) nam, donec eo perveniatur, mutatio illa communis denominatoris in denominatorem crescentem, non minuit, sed auget adjunctam illam fractionem, adeoq; & errorem.

Hoc unicum adhuc restare videtur; nempe ut ostendam qua lege Fractiones hujusmodi continue fractæ ad fractiones ordinarias commode reducantur.

Cum autem id fieri possit methodo nemini ignota, inchoando a fine, & recedendo donec ad principium tandem deveniatur: Optandum interim videtur, ut id fieri possit inchoando a principio & procedendo quousq; libet. Hoc igitur qui fieri possit jam sumus ostensuri.

Esto igitur fractio ejusmodi continue fracta quælibet, sic designata.

$$\frac{a}{\alpha}\;\frac{b}{\beta}\;\frac{c}{\gamma}\;\frac{d}{\delta}\;\frac{e}{\varepsilon}\;\&c.$$

Cum igitur constet, recepta methodo, reductionem institui posse ad hunc modum,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a}{\alpha}$$

$$\frac{a}{\alpha}\;\frac{b}{\beta} = \frac{a\beta}{b+\alpha\beta}$$

$$\frac{a}{\alpha}\;\frac{b}{\beta}\;\frac{c}{\gamma} = \frac{ac+a\beta\gamma}{\alpha c+b\gamma+\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{a}{\alpha}\;\frac{b}{\beta}\;\frac{c}{\gamma}\;\frac{d}{\delta} = \frac{a\beta d+ac\delta+a\beta\gamma\delta}{bd+\alpha\beta d+\alpha c\delta+b\gamma\delta+\alpha\beta\gamma\delta}$$

Et sic deinceps, quantum opus erit. Nos inde hanc colligimus regulam, cujus ope a principio reductionem inchoemur quousq; libet continuandam;

$$\left.\begin{array}{ccccc} P & Q & P & Q & Q \\ \hline N_3\times & \dfrac{N_1}{D_1}\;+ & D_3\times & \dfrac{N_2}{D_2}\;:= & \dfrac{N_3}{D_3} \end{array}\right\}$$

Hoc

Hoc eft; Si (trium continue fequentium fractionum) tam Numerator tertius propofitus ducatur in Numeratorem primum jam jam quæfitum, quam Denominator tertius propofitus in Numeratorem fecundum jamjam quæfitum, aggregatum erit Numerator tertius quæfitus. Et fimiliter, fi tam Numerator tertius propofitus ducatur in Denominatorem primum jamjam quæfitum, quam Denominator tertius propofitus in Denominatorem fecundum jamjam quæfitum, aggregatum erit Denominator quæfitus.

Exemplo res fiet manifefta.

Sit fractio reducenda $\frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}\,\frac{81}{11}$

Operatio fic inftituetur. Inventa fractione fecunda modo ufitato; tertia & quæ deinceps fic reperientur.

$\frac{25}{2}$	$\times 1 = 25$ $\times 2 = 4$	29
$\frac{25}{2}$	$\times 2 = 50$ $\times 13 = 26$	76
$\frac{49}{2}$	$\times 2 = 98$ $\times 29 = 58$	156
$\frac{49}{2}$	$\times 13 = 637$ $\times 76 = 152$	789
$\frac{81}{11}$	$\times 29 = 2349$ $\times 156 = 1716$	4065
$\frac{81}{11}$	$\times 76 = 6156$ $\times 789 = 8679$	14835

P	Q
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{2}{13} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}$
$\frac{25}{2}$	$\frac{29}{76} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}$
$\frac{49}{2}$	$\frac{156}{789} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}$
$\frac{81}{11}$	$\frac{4065}{14835} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}\,\frac{81}{11}$

Et fic deinceps quoufq; opus erit. Ratio operationis ex jam dictis patet.

Siquis autem adhuc miretur, unde factum fit quod fractiones hæ continue fractæ, (prout hic vel illic cuiquam fiftere placuerit) fint alternatim nunc majores nunc minores quantitate debita: hujus rei caufam fic breviter accipiat. Cum certum

tum sit numerum integrum sine ulla adjuncta fractione justo minorē esse, fractio prima, huic integro adjuncta, quantitatem auget: sed eò minus auget quo ipsa minor fuerit. Hæc igitur prima fractio quantitatem auget, & quidem eousq; ut jam, quæ fuerat justa minor fiat justa major. Hujus autem fractionis, eodem manente numeratore, si denominator augeatur, (quod fit adjecta fractione secunda,) fractio prima, adeoq; & tota quantitas, adjectione secundæ minuitur. Hæc autem diminutio eò minor erit (adeoq; & tota quantitas major) quo ipsius secundæ fractionis (manente numeratore) denominator augetur; quod fit adjectione tertiæ fractionis. Tertia igitur fractio secundum minuit, adeoq; primam auget, ut & totam igitur quantitatem. Et similiter in sequentibus. Puta quartæ adjectio minuit tertiam, hoc est, auget, secundam, adeoq; minuit primam, totamq; quantitatem. Quinta minuit quartam, adeoq; auget tertiam, minuit secundam, augetq; primam totamq; quantitatem. Adeoq; fractionum adjectio in locis imparibus auget, in paribus minuit quantitatem: Quod non de his tantum, sed de quibusvis aliis fractionibus ita (quoad denominatores) continue fractis, intelligendum erit.

Atq; hactenus Nobilissimi Viri mentem, quantâ potui brevitate simul atq; perspicuitate exposui; quæq; de ipsius methodo dicenda habui breviter indicavi.

PROP. CXCII. *Theorema.*

SI sit æquabilis Curva (non hinc inde subsultans) VC, cujus Axis VX, & Tangens invertice VT; unde ductis ad curvam rectis axi parallelis, & ab invicem æqualibus distantiis remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, &c. (in locis paribus,) sint ut 1, 6, 30, 140, &c. (qui numeri fiunt ex continuâ multiplicatione horum, $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$, &c.) Erit, ut Secunda ad Tertiam (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis 1, 6, interponendum,) sic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Sequitur ex Prop 139, et 135.

PROP. CXCIII. *Theorema.*

SI exponatur æquabilis curva VC, cui occurrat in vertice VT, unde ductis ad curvam quotlibet rectis parallelis & æqualiter ab invicem remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, Decima, &c. (in locis paribus,) sint ut $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}, \frac{945}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c.) Erit ut Secunda ad Tertiam, (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis $1, \frac{3}{2}$, interponendum,) sic Circulus ad Quadratum Diametri. (Ut autem Secunda ad Quintam, sic Triplum Circuli ad Quadruplum istius Quadrati, &c.)

Sequitur ex Prop. 118, 121, et 185.

PROP. CXCIV. *Theorema.*

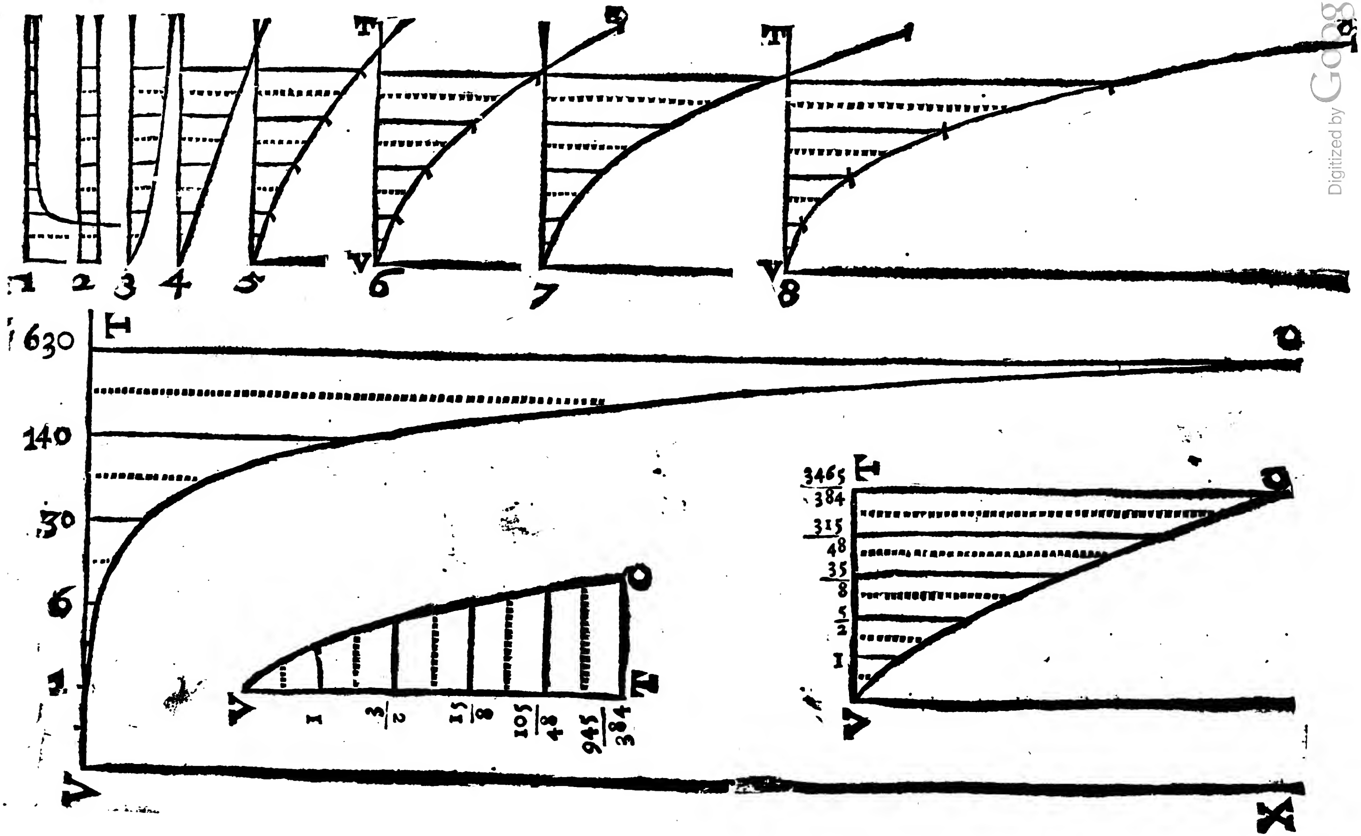
SI sit æquabilis curvæ VC, axis VX, tangens in vertice VT, unde rectæ ad curvam ductæ (axi parallelæ & æqualibus interstitiis dissitæ) secunda, quarta, sexta, octava, decima, &c. (in locis paribus) sint ut $1, \frac{5}{2}, \frac{35}{8}, \frac{315}{48}, \frac{3465}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{4} \times \frac{9}{6} \times \frac{11}{8}$ &c.) Erit, ut secunda ad tertiam (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis $1, \frac{5}{2}$, interponendum;) sic circulus ad $\frac{4}{3}$ Quadrati circumscripti (sive quadrati ex diametro;) Sive Triplum circuli ad Quadruplum quadrati circumscripti. (Ut autem Secunda ad Quintam, sic Triplum circuli ad Octuplum istius Quadrati. &c.)

Patet ex præced. & Tabella prop. 189.

SCHOLIUM.

Et quidem hujusmodi aliæ propositiones innumeræ ex eadem Tabella (prop. 189) deduci possunt: formatis scilicet aliis atq; aliis ejusmodi curvis juxta istius Tabellæ tenorem.

Quales autem futuræ sint istæ omnes curvæ non adeo facile erit judicare. Hoc interim de quibusdam observare licet. Nempe


1
2
3
4
5
6
7
8
V
T
630
140
30
6
X
1
3/2
15/8
105/48
945/384
3465/384
315/48
35/8
5/2

Nempe; In serie sexta, numeri (Triangulares) 1, 3, 6, 10, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{6}{2} \times \frac{8}{4} \times \frac{10}{6}$ &c) Sunt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola; ut dictum est prop. 173.

In serie Quarta, numeri (arithmetice proportionales) 1, 2, 3, 4, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6}$ &c) sunt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola: sive ut rectæ in Triangulo: ut patet.

In serie Secunda, numeri (æquales) 1, 1, 1, 1, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{2}{2} \times \frac{4}{4} \times \frac{6}{6}$ &c.) sunt ut quadrata rectarum (vel etiam ipsæ rectæ) in Parallelogrammo. ut patet. Adeoq; in Secunda & Quarta serie, pro curvis prodeunt revera rectæ, latus nempe illic Trianguli, hic Parallelogrammi.

In seriebus sexta, octava, decima, &c. (alternatim sumptis,) prodibunt curvæ magis adhuc compositæ, sed quarum characteres non minus accurate designantur in dicta tabella, quam Parabolæ, Hyperbolæ aut Ellipseos characteres noti.

In reliquis autem seriebus interjectis, prima, tertia, quinta, &c, (in locis imparibus,) provenient item æquabiles curvæ & regulares (quales puta pro Geometricis agnosceret Cartesius,) quamvis earum characteres difficilius explicari possint, ut qui expositis serierum, in locis paribus positarum, characteribus sunt intermedii juxta illam quam exhibuimus progressionis formam in prop. 187.

Qualiter autem ad aspectum se præbent expositæ curvæ, (tam quæ locis paribus quam quæ imparibus conveniant,) singulis tabellæ seriebus indicatæ, ostendit apposita figura, quæ sigillatim illas depictas exhibet, debitis suis mensuris ex eâdem (ut loquuntur) *Scala* desumptis.

Notandum interim est (quod & ipse aspectus indicat,) quod convexitas curvæ VC (rectam VT versus obversa) quæ in curvarum ultima est maxima, (si retro computemus,) in anterioribus sensim decrescit; donec in loco quarto curva illa in rectam (secantem) transeat (quæ inter convexam & concavam est media,) deinde loco tertio in concavam, secundo autem in parallelam, & in primo deniq; in recurvam, (quæ nempe ex iis partibus ad rectam continue appropinquat quibus reliquæ inde recedunt.) Item recta VT, quæ in quinta & sequentibus est tan-

gens, in quarta rectam secat, in tertia fit curvæ diameter, in secunda fit parallela, & in prima deniq; Asymptota.

Quænam autem sint curvarum harum omnium affectiones, & quibus modis commodissime describantur, non libet mihi (fesso jam, varioq; & impedito itinere satis lassato) curiosius impræsentiarum inquirere; ut nec Hyperbolæ quadraturam ulterius (quam supra factum est) attingere. Et quidem fieri potest ut gratam nonnullis negotium vel ea tacendo præstiturus sim, quo liceat ipsis, indicata jam methodo, eisdem investigandis oblectari.

Eas autem omnes tales esse quales pro *Geometricis* haberi velit Cartesius, quo minus dubitem id facit, quod de locis paribus jam satis constet, detectis jamjam eorum characteribus; adeoq; & de locis imparibus (quamvis eorum characteres non ita commode designari possint) non aliter censendum est. Quales autem illæ sint Æquationes quæ singulis conveniant, ex ipso ordine patebit. Cum enim seriei quartæ conveniat æquatio Lateralis, sextæ Quadratica, octavæ Cubica, &c. (puta quarum suprema potestas est, Latus, Quadratum, Cubus, &c;) ad series interjectas tales necesse est æquationes pertinere quæ sint his intermediæ; (puta, quintæ, talis quæ sit quadraticæ & laterali intermedia; & de cæteris pariter judicandum.) An autem ejusmodi Æquationes sat commode possint recepto more designari, dubitandum forsan erit.

Mihi interim sufficiat (nec quidem susceptorum laborum pænitet) rem hactenus perduxisse; novamq; ingresso semitam, eandem aliis aperuisse: quæ quidem quò me duceret, in principio non adeo facile erat hariolari, sed quæ ad curvilinearum (saltem quarundam) quadraturam, aliaq; ejusmodi abstrusiora problemata, recta tendere videbatur. Nec quidem spem fefellit. Utut enim in Circulo, ratio ea quam habet ille ad Quadratum (quam mihi præ oculis etiam ab initio fuisse non nego) non ita plane ex voto se prodat, ut in aliis aliquot curvilineis, recepto aliquo notationis modo explicanda, (sed per varios Mæandros me deduxerit, & tandem in ἄῤῥητον quiddam desinat) Operæ tamen pretium est eatenus eam indicasse quatenus ipsa numerorum natura patitur; ut nihil insuper reliquum sit quam ut inter Mathematicos conveniat quâ velint notatione (sive mea sive alia adhuc ad arbitrium excogitanda) rationem illam

ἄῤῥητον

ἄῤῥητον indicare. In aliis autem curvilineis non paucis ita ex voto successerunt omnia (& quidem supra spem non raro,) ut innumeras Curvilineorum quadraturas, partim antehac planè incognitas, partim etiam cognitas quidem antea, sed nova jam & faciliori methodo traditas, indicaverim: Aliaq; innumera ex intricatioribus Matheseos problematis, (puta de Pyramidoidibus, Conoidibus, & Sphæroidibus, de linea Spirali, & Spaciis ipsi adjacentibus, de Paraboloidibus, aliisq; passim,) vel primus detexerim, vel multum elucidaverim: Figuras item in infinitum continuatas (non unam aliquam, quod tamen a Toricellio factum, satis videbatur mirandum, sed varias) tam planas quam solidas, ad mensuram notam & finitam reduxerim.

Facile quidem fuisset (modo libuisset)innumeras passim propositiones alias inseruisse, (quod nemini harum rerum perito dubium esse potest,) cum sit ea quam trado doctrina consectariorum satis ferax. Et quidem in primoribus hujusce tractatus partibus copiosius hujusmodi consectaria interserui, ideo præsertim ut quo tenderet hæc doctrina indicarem. Verum in sequentibus illud parcius prosecutus sum, partim quòd jam ex præcedentibus eousq: pateret methodus nostra ejusq; utilitas ut jam suo Marte possit quilibet id ipse præstare , partim etiam ne propositionum numerus (qui jam turgere videbatur)adeoq; totius tractatûs moles nimis excresceret. Adeoq; multa passim in transitu leviter indicata sunt, quæ, si libuisset curiosius prosequi,integram potius disquisitionem sibi sigillatim postularent.

Quod reliquum est; orandi sunt harum rerum periti,ut quod nos præstare valuimus candide dignentur acceptare , & siquid ipsis rectius obtigit in publicum Matheseos augmentum impertiri.

LAUS DEO.

Index Propositionum.

FINIS.

Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS *SAVILIANI* in Celeberrimâ Academia OXONIENSI,

OPERUM MATHEMATICORUM *Pars Altera*:

Qua Continentur

- De Angulo Contactus & Semicirculi, Disquisitio Geometrica.
- De Sectionibus Conicis Tractatus.
- Arithmetica Infinitorum: sive de Curvilineorum quadraturâ, &c.
- Ecclipseos Solaris Observatio.

OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Veneunt apud OCTAV. PULLEIN *Lond. Bibl.* 1656.

AD LECTOREM.

NOn multa ſunt (Erudite Lector) quibus te in limine morabor. Statueram apud me, cum his quos habes, tractatus alios aliquot emiſiſſe; adeoq; huic parti aliam vel conjunxiſſe vel potius præmiſiſſe; quam quidem eodem circitèr tempore inceperant Typographi quo præſentem. Sed cum viderim operarum moras majores eſſe quam ſperaveram, mallem (amicis id deſiderantibus) hanc quam abſolverant partem in anteceſſum emittere; quam ſecutura eſt altera cumprimum per Typographos licebit. Interim, his fruere: quibus, ſi Arithmeticæ (ut loquuntur) Specioſæ, ſeu Symbolicæ, aſſuetus ſis, haud (ſpero) admodum hærebis, cum ego omnia qua potui perſpicuitate tradere ſim conatus; ſin ea adhuc carueris, poteris vel ex Oughtredi *Clavi Mathematicæ*, vel Schotenii *Principiis Matheſeos Univerſalis*, eam tibi familiarem reddere; vel, niſi prius id feceris, ex iis quæ nos brevi (favente Deo) ſumus edituri.

Errores quod attinet Typographicos, ſunt quidem illi (ſi inſuetum Typographis noſtris operis genus, & calculi multiplicitatem, ſpectes) non adeo multi, nec quidem plures (fortaſſe etiam pauciores) quam in minoris difficultatis libris ſolent occurrere; quos obſervavimus tamen, qui alicujus ſint momenti, notare mallem quam (quod ſolent multi) diſſimulare; ut eos (& ſiquos alios ipſe deprehenderis) calamo emendes.

Ang: Contact: p. 15. l. 16. *Geometricè* p 30 l: 1 *Si enim peripheria EA*, p 32 l: 15 *planæ*: p 45 l: ult: *BCA, BA*. p 48 l 29 *tamen*, p 50 l 7 *puncto P*.

Con: Sect: p 23 marg: *non ſep*. p 32 l 23 *anſam*, p 38 l 7 *ld* — p 40 l 1 *hujus*, p 52 l 17 $\frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 - \frac{d \pm a}{d} p^2$. p 53 l 19 *αF*, p 54 l pen: *rectam*. p 55 l 12 *PF. Pα* : : p 59 l 8 *quotlibet*, p 64 l pen: $t = \frac{d^2 l}{dl} - t^2$ p 66 l 11 *a centro* p 68 l ult: *tranſverſæ*, p 69 l 22 $t - d \mp a$, p 71 l 27 *Aa*, p 73 l 3

 c. d.

$c.d::x$, l pen: $\pm 2\sigma\gamma dxcq$, p 74 l ult: $\frac{\sqrt{\delta\xi lx}}{\sigma}$, p 75 l 1 $\pm\delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi}dx$

l 5, $e^2 = DOq$, p 75 l 15 *funt et*, p 83 l 8 d^2: *Horum*, l 19 $t = \frac{d^2 l}{b^2 - dl}$, p 86 l 13 $f^2 a^2 \pm f^2 ia$, l 14 $\pm f^2 a + f^2 i$, p 87 l 4 HA.HF, p 91 l $\delta^2 c^2$, l 4 $2\sigma + \delta = \zeta$, ib $\pm 2\sigma\gamma cq$, p 92 l 16 DA.Da, l 18 $\frac{\gamma dz}{\sigma c}$, l 19 $\sqrt{\delta\zeta dz}$, l 20 $\pm 2\gamma c\sqrt{}$, p 93 l 1 $\delta\zeta^2 \pm 2\gamma\sqrt{}$, l 4 *funt pun* l 12 *hyper-* l 24, 25 CHa p 94 l 4 *prop: 32*, p 103 l 21 *apponuntur*, p 106 l 21 $3f^2 da+$, p 109 l 21 $\pm pD$, l 29, 30, $9 aq^2$, p 111 l 24 *est Diam*.

Arithm: Infin: p 16 l 15 *maxime*; l 23 l^2, l 26 *subtriplam*, p 23 marg: *prop*: 24, p 27 l 26 *vero continentia*, p 33 l 26 *maxime*, p 34 l 27 *primo* 0, *secundo* 1, lin 29 $+\frac{n}{12l^2}$, lin: 30 $-\frac{1}{12}nl^2$, p 35 l 8 *prop*. 182, p 36 l 15 *seriem*, p 38 l 19 *habeat*, p 49 l 5 *pyramidoidea*, p 70 l 16 *divisor*, p 77 l 18 $AD\beta\beta$ lin: ult: *huic*, p 78 l pen: *radicum*, p 79 l 22 *subsecundanis*, p 83 l 6 *acuto*, p 87 l 20 $1 + \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$, p 89 l ult: *vel* $\frac{2}{3}$, p 91 l 14 $R^2 + 2aR + a^2$, l 22 dele *prop*: 121, p 93 l ult: a^2, p 93 l 3 $AD\beta$ p 97 tab: l 1, 120, l 3, 58240, l 4, 9945, l 5 1056, p 98 l 6 $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} \times \frac{3a+1}{3a}$, p 99 tab: l 3, 29160, l 4, 45, & 122880, p 100 l 9 + + + + + +, p 103 tab: l 3, 1 + 3, l 4, 1 + 4, p 107 l 15, $2aD + a^2$, l 17 $+ a^4$ & $- a^4$, l 25 *maximo*, p 108 l 8 *lipsem*, l 15 $4aD - 16a^2$, l 19 *ductam*, p 112 l 14 *rectas Trianguli inscripti*, l 7 $\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8}{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13}$ p 113 l 4, $-\frac{1}{13} = \frac{21}{1820}$ AD^{12}, l 5, 4 × 7 × 10 × 13, p 114 tab: l ult, 4 × 11 × 18 × 25, p 118 l 18, $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$, p 124 l 17, $+\frac{2}{5}+\frac{1}{7}$, p 125, l 5 $\frac{10}{6} = \frac{1}{3}$, l 15, $+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}$, p 127 l 16, $\frac{1}{2}ADT \times \frac{1}{3}AD^2$, p 129 l 8 *habeat*, p 131 l 13, $10\sqrt{3}$, p 132 l 5, 6, *ad* 7 × 6, p 133 l ult: $\frac{1}{6}$, p 136 l 31 *qui in secunda, laterales; qui in tertia*. p 147 l 16 *triangularium*, p 148 l 2, 720, p 152 l 32, $\frac{1}{\infty}$ B, *erit*, p 162 tab: l ult: 15, 23, & 70, p 163 l 1 *expeditius*, p 165 l 15 *meminimus, nempe*, p 177 l 27 *calcatos*, p 184 l 1, 4Fq + 8F, lin: 7, 649 Fq.

Johannis Wallisii, SS. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS

SAVILIANI in Celeberrimâ

Academia OXONIENSI,

DE ANGVLO CONTACTVS ET SEMICIRCULI *Disquisitio Geometrica*.

OXONII,

Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,

Veneunt apud *Octav. Pullein*, Lond: Bibl. *Anno* 1656.

Insignissimis Viris

D. BENJAMINO WHICHCOTO, S. T. D. Collegii Regalis Cantabrigiæ Præposito;

D. THOMÆ HORTONO, S. T. D. Collegii Reginalis ibidem Præsidi;

D. ANTHONIO BURGESIO, Rectori Ecclesiæ *Suttonensis* in Agro *Warwicensi*.

JOHANNES WALLIS *Geom. Prof.* *SAVILIANUS* Oxoniæ. S.

Cum, supremo sic favente Numine, (Insignissimi Viri) prima studiorum Academicorum principia me posuisse contigerit in florentissimo Collegio, Emanuelis *dicto*, Cantabrigiæ, *cui vos Consocii (cum aliis dignissimis doctissimisq; Viris) regendo tunc temporis præfuistis; & quidem sub vestra omnium successive peculiari tutela; istius ego & loci & temporis & personarum mihi omnino recordandum esse censeo: (Quippe ingrati ratus, unde & a quibus quis profecerit, oblivisci:) Adeoq; hoc opusculum, utut exiguum, grati tamen animi testimonium, vestris inscribendum nominibus.*

Quam felix prosperumq; hactenus fuerit Emanuelis *illud Collegium, ab Honoratissimo Equite* GUALTERO MILDMAIO *prudentissimo piissimoq; Viro (*ELIZABETHÆ, *tunc Angliæ Reginæ, a Privatis Consiliis,) annis abhinc septuaginta circiter, feliciter & auspicato fundatum; non est quod ego, vestris præsertim auribus, multis exponam. Id saltem ausim dicere, (quod nec*

nec quemquam negaturum autumo,) vix ullum utriusvis Academiæ Collegium, pari tempore, majori tum pietate tum doctrina floruisse, pluresve in messem Dei fideles sedulosq; operarios immisisse; indeq; haud facile est dictu, quanta Deo seges accreverit, quantum pietatis efficacis incrementum. Argumento esse potest nuperus Theologorum Conventus Westmonasteriensis, authoritate Parliamenti ex variis Angliæ partibus undicunq; convocatus, doctissimis, prudentissimis, & vere piis Theologis refertissimus, (qualem ego, nescio numquis alius, si doctrinam pariter & conjunctam pietatem spectemus, nec similem unquam vidi, nescio an visurus;) quorum præterpropter pars tertia ex hoc uno Collegio aliquando prodierant; quippe, ex centum circiter Theologis, plures quam triginta Emanuelis *fuerant Collegio enutriti cum tamen Collegiorum & Aularum utriusq; Academiæ numerus quadragenarium superet. Simili argumento est, quod, præter ingentem eruditorum numerum, hinc, tanquam ex refertissimo alveario, ad curas partim pastorales, partim ad alia utriusq; Academiæ Collegia, promotionis ergô, abunde transmissorum, etiam nunc temporis (Anno* 1655 *currente) ex sexdecim totidem Collegiorum Ædiumve Præfectis* Cantabrigiæ, *undecim ex hoc uno* Emanuelis *Collegio prodierunt. Quæ omnia nonnisi peculiari Numinis benedictioni in fundationem illam sincero animo positam referenda sunt, cum non aliàs huic adsint præ Collegiis aliis incitamenta ulla vel emolumenta, quibus illa videantur attribuenda. Cæterum Deus Optimus Maximus & florentissimam illam societatem, (cujus vos olim pars fuistis, & etiamnum estis ornamenta,) & vos item, vestraq; omnia feliciter sospitet, promoveatq;, in suam ipsius gloriam, vestrum ipsorum commodum, & totius Ecclesiæ incrementum.*

De Angulo Contactûs, & Semicirculi, Disquisitio Geometrica.

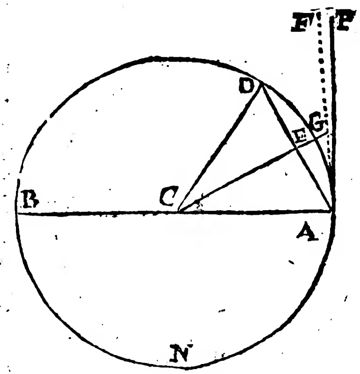
CAP. I.

Ansa & status Controversiæ.

Quoniam illi, quæ sequitur, Controversiæ ansam dedit Propositio 16a Libri 3i Euclidis; illam integram primùm apponendam duxi, ejusq; demonstrationis summam.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

" Quæ circuli diametro (AB) ad angulos rectos ab extre-
" mitate ducitur recta (AP)
" cadit extra circulum. 2. Et
" in locum qui inter rectam
" (AP) & peripheriam
" (DEA) interjicitur, altera
" recta (ut FA) non cadet:
" 3. Et Semicirculi angulus
" (EAC) major est omni
" angulo acuto rectilineo:
" 4. Reliquus autem (EAP)
" minor:



" Nam 1° si caderet per-
" pendicularis illa intra cir-
" culum, ut AD (vel etiam
" si jaceret in ipsa periphe-
" riâ) essent anguli DAC,
" ADC, æquales, per 5 e 1, ideoq; uterq; rectus; contra 17 e 1.
" 2° Si recta FA (inter peripheriam & perpendicularem PA)

"cadere possit, ducatur ad illam perpendicularis ex centro "CEG; quoniam igitur angulus rectus CGA major est acuto "CAF (ut qui pars est recti CAP,) esset, per 19 e 1, latus CG "minus quam CA, hoc est, minus quam CE, pars sui. Pars "3a & 4a sequuntur ex secundâ.

Occasione sumpta ab hac Euclidis Propositione, gravis orta est controversia (quod mirum est, in re pure Geometrica,) inter Peletarium & Clavium; quæ, quod sciam, nondum unanimi Mathematicorum consensu determinationem nacta est.

Primus, quod sciam, Peletarius asseruit, *Angulum* qui dicitur *Contactus*, seu contingentiæ, non esse revera *Angulum*, nec omnino *Quantitatem*; sed Rectam, quæ Circulum tangit, cum Peripheria coincidere, non autem ad illam inclinari; Angulum autem Semicirculi omnino Rectum esse, & recto rectilineo æqualem.

Contra, Clavius asserit, illum vere Angulum esse, & quidem quantitatem in infinitum divisibilem, non quidem per lineam rectam, at saltem per Peripheriam majoris circuli; minorem tamen quàm est ullus rectilineus possibilis: Angulum vero Semicirculi minorem esse angulo recto rectilineo, majorem tamen quovis rectilineo acuto.

CAP. II.

Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse.

ILLud autem ego primum præmonendum esse judico; Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse, (quanquam ex illius principiis dirimi posse non dubitem.) Probat enim Euclides, & recte quidem, Angulum semicirculi majorem esse omni Acuto rectilineo; an verò sit Recto rectilineo vel minor vel æqualis, non dicit: utrumvis autem dicatur, manet Euclidéi dicti veritas, modò non sit acuto minor: Itèm Angulum contactûs (nempe siquis sit) minorem esse omni rectilineo, quia scilicet nec æqualis, nec major est; at verò, an sit omnino quantitas necne, non dicit; nec quidem, si dixisset, posset allata demonstratio id confirmare: nam & illud quod asserit verum manet, etiamsi suppositus ille angulus contactûs nihil sit; quod enim omnino nihil est, est certè omni positivâ quantitate minus. Si

Si verò voluisset Euclides affirmâsse, Angulum semicirculi minorem quidem esse quàm est rectus rectilineus, majorem autem quovis acuto rectilineo; oportuisset illum utrumq; membrum probasse: nempe, non modo angulum semicirculi majorem esse omni acuto rectilineo (quod quidem verum est de recto rectilineo, aut etiam obtuso;) sed & minorem recto esse; hoc autem nec probat Euclides, nec quidem omnino asserit. Et similiter de Angulo Contactus; si affirmâsse voluisset, Angulum qui dicitur Contactûs, verè quidem Angulum esse, & reverâ Quantum, minorem tamen omni acuto rectilineo; oportuisset utrumq; membrum probasse. At ille solummodo probat, Angulum contactus saltem minorem omni angulo rectilineo; an verò sit revera Quantus necne, nec probat, nec affirmat, sed prorsus silet. Non autem putandus est Euclides, acutissimus demonstrator, qui ne ullum paralogismum usquam admisit, (fatente ipso Ramo, qui tamen fatetur se dedita operâ illud quæsivisse, quiq;, ut notum est, sat severus, nequid gravius dicam, in Euclidem judex erat,) non putandus, inquam, est Euclides, tantam παρoρίαν admittere voluisse, ut ubi duo sat distincta propositionis membra (vel, si placet, duas propositiones) affirmâre voluerit, non nisi ipsorum unum demonstraret.

At vero, quanquam Euclides neutrum horum dixerit, nempe, nec angulum semicirculi minorem esse recto rectilineo, nec etiam angulum contactus esse reverâ quantum; oppositam tamen opinionem, quamvis fortasse non verbis Euclidis, ipsius tamen sententiæ contrariam esse, contendit Clavius: *Si enim*, inquit, *Euclides sensisset angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi majorem? Quid enim clarius, quàm, Nihil, cujusmodi est angulus contactus ex Peletarii sententia, minus esse quocunq; angulo? Quid quoq; magis perspicuum, quàm, angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, majorem esse quolibet acuto?*

Verùm ego, quæ esset Euclidis hac in re sententia, non obstante hoc Clavii ratiocinio, fateor me non satis assequi. Euclides certè, quod sciam, suam hac de re sententiam nusquam profert. Illam vero ex Clavii ratiocinio satis patescere prorsus nego. Certum enim est, Euclidem aliquando minus assere-

re, quàm & asserere potuisset, & ipse senserit; sive quod nondum opus esset totum quod senserit producendi, sive quod nondum ex prædemonstratis commodè ostendi posset, sive alia forsan aliquando de causa. Exempli loco sint propositiones 16ª & 17ª primi. Prop. 16. sic est, *Trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno & opposito major est.* An verò ex hac propositionis forma dicendum est (juxta quod Clavius hic arguit de angulo contactûs) *Si Euclides sensisset angulum externum æqualem esse duobus internis oppositis simul sumptis, quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret utrovis majorem esse? quid enim clarius est, quàm, quod duobus simul sumptis est æquale, eorum utrovis sigillatim majus esse?* Prop. 17ª hæc est, *Trianguli duo anguli sunt duobus rectis minores omnifariam sumpti:* At (juxta Clavii ratiocinium) *Si Euclides sensisset, tres simul angulos æquari duobus rectis, quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret, eorum duos minores esse duobus rectis? quid enim magis perspicuum, quàm, quod tribus simul æquale est, eorum duobus esse majus?* An autem hinc concludere licet, vel, Angulum externum non esse æqualem duobus internis oppositis simul sumptis? vel, Tres angulos trianguli rectilinei non esse æquales duobus rectis? vel, Euclidem non ita sensisse? Nullo modo; nam & ea utraq; sic esse, & Euclidem illud non ignorasse, liquet ex 32 e 1. ubi illa & affirmantur & demonstrantur. Sed & etiamsi propositio hæc 32ª deesset, non tamen essent 16ª & 17ª vel minus veræ, vel minùs legitimè demonstratæ: verum quidem esset, Euclidem ea de re sententiam suam minus exposuisse. Pariter & de 16 e 3 dicendum est. Affirmat scilicet Euclides, Angulum semicirculi majorem esse quolibet acuto rectilineo, Angulum verò contactus quolibet acuto rectilineo minorem: quod autem attinet ad controversiam Peletarium inter & Clavium, prorsus tacet, neque suam sententiam omnino exponit; angulum nempe semicirculi recto rectilineo æqualem, neq; ait, neq; negat; angulum item contactus neq; negat, neq; affirmat, verè quantum esse.

Sed & eodem modo abstinet in 31 e 3 (ubi tamen locus esset opportunus suam ea de re sententiam proferendi:) affirmat enim, " *Angulum in semicirculo, rectum esse; in segmento majori, mino-*
" *rem recto; in minori segmento, majorem; item Angulum majoris seg-*
" *menti majorem recto; minoris, minorem;* angulus autem *semicirculi* quantus sit (quamvis illud statim exspectandum esset) non dicit

cit, sed cautè abstinet, sive quod ipsi forsan vix constiterit quid erat dicendum, sive quod non præsto fuerit demonstratio quâ suam sententiam confirmet. Sed & veteres (quod sciam) omnes (præter unum Proclum) eâ de re prorsus tacent.

Non diffiteor quidem Recentiorum aliquot, magnos viros, & ex veteribus fortasse nonnullos (saltem Proclum) de angulo contactus ita loquutos esse, acsi haberet anguli quantitatem; adeóq; de angulo semicirculi tanquam minori quàm est angulus rectus rectilineus. Sed argumentis hac in re agendum est, non authoritatibus: præsertim cùm ex veteribus nemo, quod sciam, quidquam hac in re demonstrasse repertus sit.

CAP. III.

Anguli Plani natura & definitio explicantur.

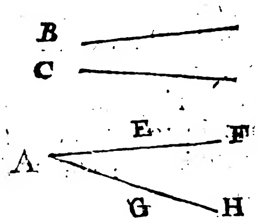
VT rem igitur controversam intimiùs aggrediar, inchoandum erit a natura *Anguli plani*; quem Euclides sic definit 8 d 1. " *Angulus planus est mutua κλίσις, seu inclinatio, duarum linea-" rum in plano sese tangentium (ἁπτομένων) & non indirectum posita-" rum.*

Peletarius hanc definitionem paulò immutatam mallet; ut nempe de linearum mutuo sese *secantium* concursu tantùm intelligatur. Verùm nulla necessitas cogit hujusmodi mutationem fieri. Quamvis enim, juxta Peletarium, solas illas lineas angulum continere, dicendum sit, quæ, si producantur, se mutuo secabunt: non tamen minùs verum erit, juxta eadem principia, easdem solùm lineas mutuò inclinatas concurrere: quæ enim suadent, circumferentiam cum recta contingente angulum non continere; eadem etiam suadebunt, has lineas mutuò inclinatas non esse: Ita ut non sit opus, ob hanc sententiam, Euclidis definitionem mutare.

In Euclidis verò definitione, notandum est primò, duarum linearum mutuam κλίσιν, seu inclinationem ad invicem, requiri. Ideóq; siqua lineæ concurrant, nec tamen inclinentur ad invicem, angulum non constituent, quia nempe angulus, ex definitione, est linearum mutua inclinatio.

Deinde vero, non quævis linearum inclinatio, Angulus dicitur: sed linearum concurrentium, sive se mutuo tangenti-

un ἁπτομένων: (nam ἅπτεσθαι apud Euclidem dicitur de quocunq; cactu, seu concurrentia; ἐφάπτεσθαι de contactu κατ' ἐξοχὴν, qualis definitur 2 & 3 d 1 3.) Quamvis enim lineæ distantes in eodem plano, inclinari ad invicem dici possint, ut B, C; non tamen angulum constituunt, nisi concurrant.

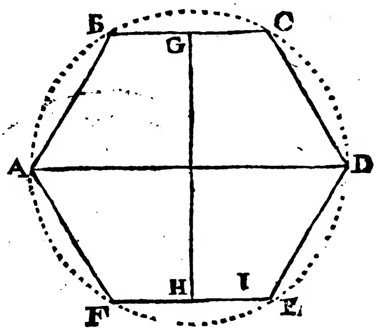


Et quidem ipsæ concurrentes lineæ, quamvis totæ forsan inclinentur ad invicem; angulū tamen non alibi quam in ipso puncto concursus formant. Verbi gratia, lineæ A F pars quælibet ad lineam A H inclinatur; at non harum linearum partes quælibet, puta E F, G H, angulum formant; sed earum tantum extrema, in communi puncto A concurrentia: Et quidem quantacunq; utriusvis pars alia abscindatur, modo tantillum supersit ut concursus conservetur, angulus omnino invariatus manet; idem enim omnino angulus est qui cruribus A F, A H, & qui cruribus A E, A G, continetur.

Non igitur ex linearum concurrentium inclinatione qualibet, judicatur Angulus, (si nempe ita se habeant lineæ concurrentes, ut hic magis, illic minus inclinentur,) sed ex illa quam sortiuntur inclinatione in ipso concursus puncto. Ideoq; angulus, quem facit perimeter Hexagoni A B C D E F cum recta A D, non æstimandus est ex quacunq; inclinatione quam habet perimeter in quacunq; sui parte ad rectam A D, (puta in parte B C) sed ex ea quam habet in punctis concursus A, D: sic angulus, quem facit cum recta G H, non ex inclinatione quam ubivis habet perimeter ad illā rectam, (puta quam habet in partibus A B, vel E D) sed quam habet in ipsis punctis concursus G, H.

Et quamvis dici possit, Perimetrum Hexagoni describi, non esse lineam unam, sed ex variis (puta A B, B C, C D, D E, E F, F A,) aggregatam; ideoq; fallaciam πλειόνων ἐρωτήσεως committi, si de inclinatione ejusmodi perimetri ad rectam quæratur: Idem tamen omnino eveniret, si, pro perimetro figuræ rectilineæ, ponatur peripheria, vel alia linea curva; cujus inclinatio ad quamvis rectam propositam non eadem manet (prout in rectis fieri solet,) sed in singulis punctis variatur, quamvis interim linea isthæc

isthæc curva pro unica linea habeatur. Non enim peripheriæ segmentum BC (aut quodlibet ipsius punctum) eandem inclinationem habet ad rectam AD, quam habet ipsius peripheriæ segmentum AB (aut quodvis ipsius punctum,) ad eandem rectam: Patet enim, ipsius segmenti BC situm magis ad parallelismum accedere, at segmenti AB propius ad perpendiculum: Angulus autem quem facit ea peripheria cum Diametro AD, non æstimandus est secundum inclinationem segmenti BC (aut alicujus in eo particulæ) sed secundum illam quam habet perimeter in sui particula contigua, seu potius in ipso puncto concursus.



Deniq; , additur in illa definitione Euclidea, phrasis hæc, *μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, non in directum positarum*: unde innuitur, lineas in directum positas angulum non comprehendere. Non autem vult Euclides, per *lineas in directum positas*, lineas tantummodo rectas continuatas, sive duo segmenta contigua ejusdem rectæ: sic enim continuata peripheria, in singulis sui punctis, angulum formare dicenda esset, quod tamen nec Euclides, nec alii solent affirmare: Sed, per *lineas in directum positas*, eas intelligit, quæ sese mutuo continuare dici possunt, ut exinde una linea fiat. Atq; hactenus Anguli plani naturam, quantum opus videtur, explicavi.

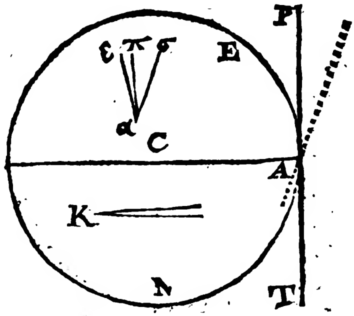
CAP. IV.

Argumentum primum, ab Anguli plani natura petitum.

His prælibatis, videamus quid in hac controversia, utrinq; dici potest.

Qui angulum semicirculi recto rectilineo minorem asserunt, nituntur

Nituntur communi huic notioni, *Totum est majus sua parte*, vel, pars toto minor. At, inquiunt, semicirculi Angulus C A E, est pars anguli recti rectilinei C A P; ergo est recto minor; &



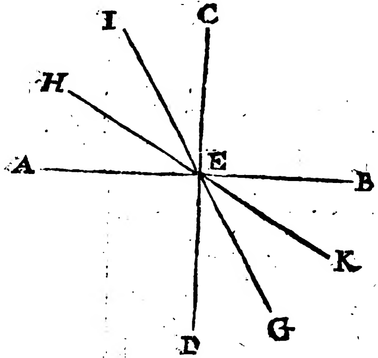
quidem tanto minor quantus est angulus interjectus E A P, qui est angulus contactus.

Peletarius contra, negat angulum semicirculi minorem esse recto rectilineo, aut recti partem esse, sed toti recto æqualem; quia scilicet angulus contactûs (qui auferri supponitur ex recto, ut restet angulus semicirculi) est non-angulus, ejusq; quantitas nulla: at qui aufert angulum tantummodo imaginarium, ille nihil aufert, & ejusmodi imaginaria ablatione quantitas non omnino minuitur, sed eadem, quæ prius erat, invariata manet.

Cardo igitur controversiæ hic est, An qui dicitur Angulus contactûs sit verè Angulus, verámq; anguli quantitatem habeat, ut vult Clavius; vel revera non-angulus, ut vult Peletarius, sed tantum angulus imaginarius, qui veram anguli quantitatem nullam habeat.

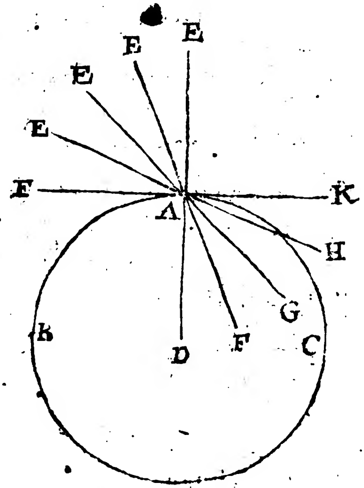
Ut hoc explicatius daret *Peletarius*, hujusmodi diagramma proponit. Duabus rectis A B, C D, se mutuo secantibus in puncto E ad angulos rectos; si intelligatur recta C D, puncto E fixo, circumvolvi, ubi pervenerit ad situm F G, ex angulis rectis fiunt obliqui (hinc acuti, illinc obtusi,) qui fient adhuc magis

magis obliqui cum perventum erit ad situm HK, & sic deinceps, donec perveniatur ad AB; tunc enim cessabit intersectio,



& simul angulus evanescet, quoniam non jam ad rectam AB inclinabitur, sed in ipsa jacebit immersa.

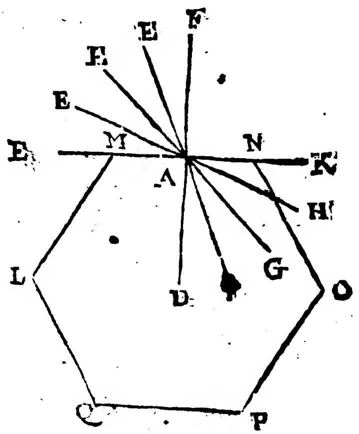
Neq; secus, inquit, est in curvo. Si enim DE, recta per centrum, peripheriam BAC secans in puncto A, super eo circumducatur per puncta FGH, fient anguli continuè varii cum peripheriâ, donec, cessante sectione, linea ED facta sit EK, ac tangat circulum. Atq; jam linea ED vel EK non inclinata intelligitur, sed immersa in ipsa BAC peripheriâ, quantum ad angulum attinet, non aliter quam si ipsa BAC esset linea recta.



Illud, credo, vult Peletarius; Rectam ED, cum perventum est ad situm EK, (ubi desinit peripheriam secare, & facta est

tangens,) non jam inclinari ad peripheriam, sed super ipsam ἀκλινῶς jacere, & cum ipsa coincidere, eousq; scilicet dum peripheria supponitur eandem inclinationem retinere quam habuit in ipso puncto A: Quòd autem postea quasi resiliat peripheria a recta E K, ideo factum est, quia peripheria suam inclinationem (ut et aliæ curvæ) subinde per singula puncta mutat, adeóq; ipsius inclinatio, quæ in puncto A nulla erat, quum primum ab eo puncto recessum est fit aliqua, quæ & deinceps continuò variatur, omnésq; possibiles variationes admittit.

Hoc autem fortasse meliùs concipietur, si, pro circuli peripheria, substituamus figuræ rectilineæ perimetrum: si igitur

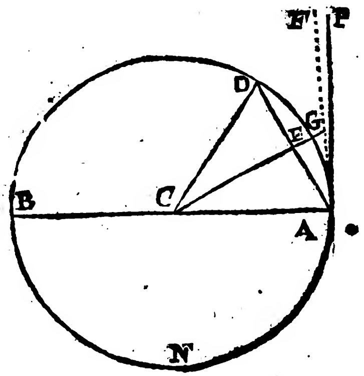


D E, perimetrum Hexagoni secans ad angulos rectos in puncto A, super illo circumducatur per puncta F, G, H, angulos continuo magis obliquos faciet usq; dum ad situm E K perveniat, hic enim cessat sectiò, & evanescit angulus: ipsa enim E K in Hexagoni perimetro ἀκλινῶς jacet, & cum ipsa coincidit; non tamen cum tota perimetro, (neq; quidem ipsa tota, si saltem producatur,) sed cum ista perimetri parte M N quæ eandem retinet inclinationem quæ fuit in puncto A; at vero quum primum perimeter suam inclinationem mutat, in punctis M, N, deserit statim rectam perimeter & ab illa resilit, suamq; subinde inclinationem aliquoties mutat in punctis O, P, Q, L: adeóq; inclinatio perimetri respectu rectæ tangentis E K, quæ in puncto A nulla erat, fit subinde alia atq; alia. Quæ autem in figura rectilinea contingit inclinationis in singulis lateribus variatio, ea in circulo contingit in singulis punctis: unde recta E K, quæ figuram rectilineam contingit per integrum latus M N, (cum quo nullum igitur angulum facit,) eadem circulum non contingit

tingit nisi in unico puncto, ipsiq; soli ἀκλινῶς coincidit, adeóq; angulum non facit. Atq; ita sententiam Peletarii, quanta potui perspicuitate, proposui.

His ita explicatis, hoc modo licebit argumentum formare. Ubi linearum concurrentium nulla est inclinatio, (sive propter coincidentiam illud fiat, sive propter continuationem) ibi nullus est angulus, (est enim angulus mutua concurrentium inclinatio, per 8 d 1.) at circumferentiæ ad rectam tangentem, in puncto contactûs, nulla est inclinatio, (ut ex præexplicatis patet:) ergo nullus ab ipsis fit angulus. Angulus igitur, qui Contactûs dicitur, est angulus tantùm imaginarius, non vere angulus Quod erat ostendendum.

Ad ulteriorem confirmationem minoris propositionis in hoc argumento, præter ea quæ jam dicta sunt, poterit & hoc, si o-



pus sit, breviter adjungi. Si circumducta semi diameter CB, circa centrum C, extremo suo puncto B, describat peripheriam BEAN; punctum B motu suo ante contactum in puncto A verget ad rectam tangentem AP, post contactum ab illa resilit, at in ipso contactûs puncto indifferenter se habet ad utrumq;, nec appropinquat enim nec elongatur, sed neq; rectam transit, continuatur tamen uniformiter motus: At motus invariatus, qui ad assignatam in eodem plano rectam neq; accedat, neq; ab ea recedat, neq; tamen transeat, quo pacto inclinatus dici possit, non video; (neq; enim versum inclinat, neq; retrorsum, nec ta-

men transit,) vel enim propter linearum coincidentiam, vel saltem parallelismum, fieri dicendum erit.

Qui autem secus sentiunt, idem videntur affirmare, (ut familiari utar instantia,) acsi dicerent, ambulantem in circulo Horizontali a puncto Meridionali N (ubi Orientem versus spectat) donec continuato itinere per punctum Orientale A, ad puncta E, D, perveniat (ubi Occidentem versus spectat,) nec tamen interim unquã directè spectet Septentrionẽ. Nam siquando directe spectet Septentrionẽ, erit certe cũ in puncto A existit, (prius enim aspectus ad Orientem declinat, postea verò ad Occidentem) si verò in puncto A directe spectet septentrionẽ, (neq; ad Orientem neq; ad Occidentem declinans,) erit certe in illo puncto A tendentiá circuli (cujus ductum sequitur incedens) versus punctum P, (nam recta AP erit linea meridionalis, ut quæ lineam Orientis & Occidentis AB transversim secat ad angulos rectos,) adeóq; in illo puncto eadem erit tendentia tam circumferentiæ quàm rectæ tangentis; nullus igitur angulus, sed linearum coincidentia.

Vide figuram paginæ præcedentis.

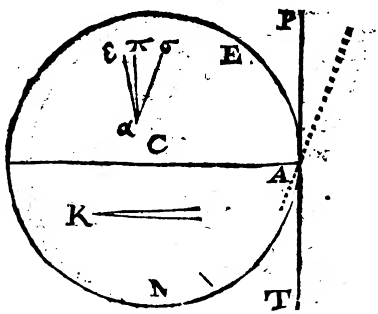
Sed, quoniam sententia isthæc Peletarii ægriùs antehac assensum invenit: Præter ea quæ dicta sunt, quæ quidem veram & genuinam rei causam videntur continere, adeóq; a priori demonstrare; Alias adhuc aliquot demonstrationes adjungendas duxi, partim a Peletario allatas, partim a me additas. Non quòd velim singula quæ inter Peletarium & Clavium agitantur examinare; quæ scilicet vel minùs caute ab hoc aut illo efferuntur, aut ad hominem dicta sunt, potiùs quam ad rem; sed ea solùm quæ argumentorum vires exhibent, ipsámq; rem controversam propius attingunt.

CAP.

CAP. V.

Argumentum secundum; Ubi, de Angulorum ὁμογενείᾳ.

PEletarii argumentum primum, quo assensum cogere conatur, & cui præcipuas vires attribuit, est ἀπαγωγὴ, seu deductio ad absurdum, sive impossibile: nititur autem propositioni primæ decimi Euclidis, quæ hæc est, *Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, si a majori auferatur majus quam dimidium, & item a residuo majus quam dimidium, idq; continuè fiat; relinquetur tandem magnitudo aliqua minor magnitudine minore proposita.* Unde concludit Peletarius, quòd, si angulus contactus E A P, & rectilineus K, sint propositæ quantitates inæquales, sitq; angulus



rectilineus angulo contactûs major; si ab angulo rectilineo auferatur (vel semissis, vel) plusquam semissis, & deinde residui (semissis, aut) plusquam semissis, & sic deinceps; tandem relinquetur angulus rectilineus (nempe, si sectiones rectis lineis fiebant) angulo contactûs minor: At hoc fieri non posse demonstravit Euclides 16 e 3. Non sunt igitur angulus contactûs & rectilineus duæ inæquales quantitates (ut supponebatur;) sed eorum alter non-quantitas. Angulus igitur contactûs (nam de rectilineo non est quæstio) est non-quantus, sive non-angulus; quod erat ostendendum.

Atq; eodem modo arguere licebit ex 2a primi Archimedis,

 de

de Sphærâ & Cylindro: quæ propositio hæc est, *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus, possibile est duas rectas describere, quarum minor ad majorem, rationem habebit minorem, quàm habet magnitudo minor ad majorem.* Si autem possibiles sint duæ rectæ lineæ, quarum hæc ad illam minorem rationem habebit, quam habet angulus contactûs, ad rectilineum (quod omnino dicendum est, per hanc Propositionem, si angulus contactus sit vere quantitas,) certe angulus contactûs non erit omni angulo rectilineo possibili minor: quum possit angulus rectilineus in infinitum dividi, per 9 e 1, non minus quàm recta linea.

Sed & Euclides, & Archimedes, passim hoc assumunt in demonstrationibus quasi per se notum, & postulandum; *quantitatem minorem toties multiplicari posse ut quamvis assignatam majorem superet.* Ergo, & angulus contactûs (si saltem sit omnino quantus) toties multiplicari potest, ut angulum quemvis rectilineum superet; non esset igitur (quod tamen esse demonstravit Euclides) omni possibili rectilineo minor.

Quid autem Clavius ad hæc? Nempe ait, Propositionem illam Euclidis intelligi de illis quantitatibus quæ sunt ejusdem generis, & quarum utravis multiplicata alteram excedere possit; quod de angulo contactus & rectilineo dici non potest, cùm angulus contactûs quantumvis multiplicatus angulum rectilineum superare nequeat. (Atq; idem, credo, dicturus esset de memorata propositione Archimedis, si illam adduxisset Peletarius.) Magnitudines autem illas, quarum altera multiplicata reliquam superare nequit, non censendas esse, ait, ejusdem generis, quod ad proportionem attinet, licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur.

Quibus ego hæc habeo quæ regeram.

1° Fatendum est propositiones illas, & quidem omnes alias ubi de proportionibus agitur, intelligendas esse de quantitatibus tantum homogeneis. Neq; enim Peletarius, nec, credo, quisquam alius, Quantitates Heterogeneas sic comparari posse diceret. Quis enim unquam affirmavit, Anguli ad Superficiem, Numeri ad Magnitudinem, Lineæ ad Solidum, ullam rationem esse? Aut quidem Heterogeneorum unum altero vel majus esse, vel minus, vel ipsi æquale? Vel etiam addi aut subduci posse? Nam quantitates Heterogeneæ, non modò sunt ἀσύμμετροι, (quod

&

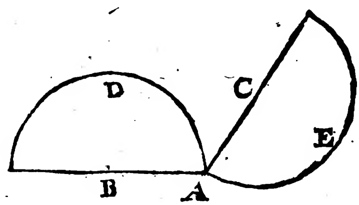
& inter Homogeneas etiam non rarò accidit, ut ex Decimo Euclidis manifestum est,) sed & plane ἀσύμβλητοι. Atq; illud satis innuit Euclides in *Rationis* definitione, 3 d 5, quum ait esse, *duarum magnitudinum* (ὁμογενῶν) *ejusdem generis, mutuam quandam secundum quantitatem habitudinem.*

Verùm 2°. Dico ego omnes omnino angulos planos, sive rectilinei sint, sive curvilinei, sive misti, Homogeneos esse, & quidem quamcunq; rationem ad alios assignandos subire posse; sive æqualitatis, sive inæqualitatis, rationalis, sive irrationalis. Quid enim impedit quo minùs ita se res habeat? aut quidnam illud est unde hanc ἑτερογένειαν oriri supponamus?

De Angulis Rectilineis inter se, res est in confesso: nemo enim unquam dubitavit angulos rectilineos in quàvis possibili ratione fieri posse? quamvis revera nondum methodus constet, (neq; forsan unquam constabit,) qua possimus datum angulum rectilineum in data ratione (Geometrici) secare.

De Angulis item curvilineis, rem etiam non negandam existimo: possunt enim curvilinei ad invicem vel æquales assignari, vel inæquales. Atq; idem etiam, de angulis mistis inter se, dici poterit.

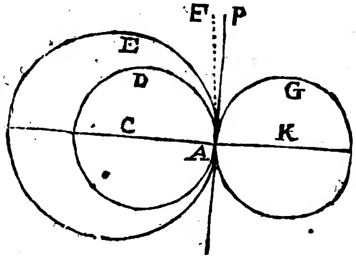
Imò verò & angulo rectilineo cuilibet possibili, possibile est & curvilineum æqualem assignare: prout ipse Clavius, ex Proclo, demonstrat, ad 5 d 5. Est enim, exempli gratia, angulus curvilineus D A E, æqualis rectilineo B A C: Et pari modo, cuivis rectilineo assignabili, assignabilis est æqualis curvilineus: ideóq; & curvilinei, non modò inter se, sed & cum rectilineis, quamlibet assignabilem rationem subire possunt, quam ipsi subire possunt rectilinei inter se: Non igitur curvitas crurum ἑτερογένειαν angulorum inducet, quin possint adhuc ad rectilineos rationem sive proportionem habere.



At fortassis dicetur, Quamvis verum illud sit de rectilineis & curvilineis quibusdam inter se, non tamen ita erit in angulis mistis.

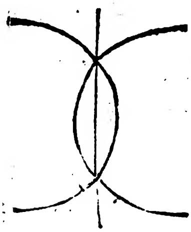
Imo

Imò verò in angulis mistis illud etiam verum est, non modò



si ad curvilineos, verùm etiam si ad rectilineos comparentur. Nam, duobus se mutuò contingentibus circulis, saltem æqualibus, G A, D A, quorum etiam utrumq; contingit, in eodem puncto A, recta P A; ne quidem ipse Clavius negabit angulum contactûs mistilineum GAP, (si modo sit angulus) semissem esse anguli contactus curvilinei GAD, semissis autem ad suum integrum veram esse rationem, nemo dubitabit. Angulus igitur curvilineus & mistilineus (si saltem anguli contactus sint verè anguli, ut vult Clavius,) sunt homogenei, & veræ rationis ad invicem capaces.

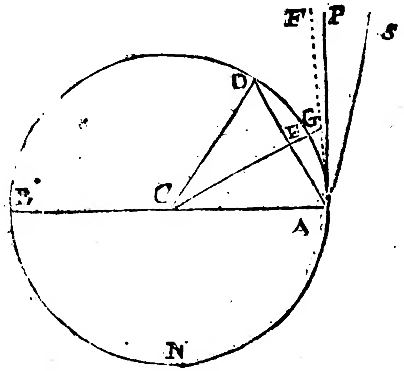
Quod si angulus, qui dicitur, contactûs revera non sit angulus, (prout ego, cum Peletario, existimo;) attamen curvilinei cum mistis nihilominus homogenei erunt. Nam si duo circuli,



saltem æquales, se mutuò secent, &, per duo sectionum puncta, recta ducatur; manifestum est, fieri curvilineos angulos mistilineorum duplos, tam qui curvis convexis, quum qui curvis concavis, continentur. Potest igitur curvilineus, ad angulum mistum veram rationem habere; adeoq; ipsi, fatente Clavio, est homogeneus.

Sed & potest angulus mistus etiam ad rectilineum rationem habere; quod nec Clavium fuisse negaturum existimo. Nam recta (si non quæ tangit, saltem) quæ secat peripheriam, angulum cum peripheriâ (tam intra quam extra) mistum facit, qui erit angulo rectilineo, saltem aliquo, major; qui quidem multiplicatus poterit & quemvis assignatum angulum rectilineum superare, (& contra, rectilineus hunc) ideóq;, fatente ipso Clavio, λόγον ἔχειν, dicendus erit, per 5 d 5. Exempli gratiâ. Si peripheriam E A, recta S A secet, P A tangat, in puncto A; erit angulus mistus E A S vel æqualis vel saltem major angulo rectilineo P A S; & propterea poterit

poterit multiplicatus quemvis angulum rectilineum superare, non minus quam ipse P A S, (& rectilineus illum,) ideóq; ad quemvis angulum rectilineum rationem habebit, per 5 d 5. Erit igitur angulus mistus E A S, rectilineo homogeneus: cur igitur & mistus E A P (si quidem sit angulus) non esset homogeneus, non video: crura siquidem vel eadem habent, vel quàm



simillima, nec aliter differunt quam quod magis aut minus divaricentur. Sed & eodem modo facile ostendi potest, omnes alios angulos, sive rectilineos sive curvilineos sive mistos, (si angulum contactus excipias) & quidem sive peripheriis sive aliis curvis formentur, tales esse quales ne quidem Clavius negaret cuivis angulo rectilineo & homogeneos esse & quidem λόγον ἔχειν; soli siquidem anguli contactuum, secundum illum, sunt quidem anguli plani, nec tamen aliis quibusvis sive rectilineis sive curvilineis sive mistis homogenei: Unde autem illa, quam somniet, ἑτερογένεια oriatur, neq; potest ille ullatenus ostendere, neq; ego vel somniare. Non nego quidem illum hac in re aliquid conari, sed conatu planè irrito: videamus tamen quid illud est.

CAP. VI.

Exceptionibus Clavii respondetur.

EGO, inquit Clavius, *angulos illos*, (contingentiæ scilicet & rectilineum) *Ejusdem esse generis negavi, hac solum de causâ, quod*

angulus contactus quantumvis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat.

At inquam ego, Idem omnino sequi, si angulus contactus statuatur (non quidem angulus heterogeneus, sed) non-angulus. Nam, quod nihil anguli habet, quantumvis multiplicetur, nunquam constituet angulum: eâdem nempe ratione quâ *Ciphra*, quantumvis multiplicata, nunquam constituet *Numerum*. Assumit aut Clavius, illud nempe quod erat probandum, Angulum contactûs esse verè angulum: atq;, hoc quasi concesso, conatur ostendere, Heterogeneum esse, saltem quod ad rationem attinet; eò nempe quod angulus homogeneus non sit per 5 d 5. Ego quidem definitionem Euclidis (cui ipsius argumentum innititur) facile concedo, & pro verissimâ assertione agnosco; nempe *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare*; & contra, *Magnitudines, quæ non possunt, quantumvis multiplicatæ, se mutuo superare, non dicendæ sunt rationem inter se habere*; sed pro heterogeneis habendæ sunt. Non igitur affirmo angulum contactûs & rectilineum esse quantitates homogeneas, sed nec heterogeneas, sed eorum alterum quantitatem esse, alterum non esse. Atq; illud antea dixerat Peletarius, nec tamen quidquam solidæ rationis affert Clavius, quâ contrarium ostendat.

Quod enim dicit, ex definitione anguli plani, *Ut angulus planus efficiatur, sufficere duas lineas in plano ad invicem inclinari*, non autem requiri, *ut se mutuo secent*. Ego illud fateor; sed nego peripheriam & rectam tangentem *ad invicem inclinari*, saltem quoad punctum concursus; coincidunt enim, non inclinantur. Agnosco etiam (quod alibi ait) *Angulum consistere in unico puncto, & linearum inclinatione quæ non indirectum jacent*; verum lineas has *inclinari* non agnosco. Sed & cum Peletario affirmo, eas solùm lineas *inclinari* (in puncto concursûs) quæ; si producantur, se mutuò secabunt: neq; contrarium Clavius ostendit uspiam.

At, inquit, *Recta finita & infinita ideo non censentur ejusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat, quamvis sub eodem genere magnitudinis, nempe lineâ rectâ, comprehendantur.*

Respondeo. Propositio Archimedis procedit de duabus magnitudinibus inæqualibus *datis*, (δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων,) Et similiter Euclidis 1 e 10 de duabus magnitudinibus inæqualibus *propositis*, (δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων.) At verò quis

dedit

dedit unquam, vel *proposuit*, lineam *infinitam*? Quod enim (magnitudine) *datur*, eò ipso quòd datur, est finitum.

Fateor quidem dici solere, *Finiti ad infinitum nullam esse proportionem*. Sed, inquam, per *infinitum*, tunc intelligi, vel *indeterminatum* aut *indefinitum*; vel quid *Positivè infinitum*, quod nullos admittit terminos.

Priori sensu Euclides in 12 e 1, & passim alibi, vocem illam sumit, dum jubet rectam infinitam ducere, vel datam rectam in infinitum producere. Non enim illud vult ut lineam quis duceret, quæ, cùm ducta fuerit, sit infinita; esset enim hoc impossibile, & postulato secundo contrarium, cujus tamen vi ejusdem constructio juberi solet: sed ut linea quantumlibet longa ducatur. Et hoc sensu, verum quidem est, quantitatis indeterminatæ ad determinatam nullam esse determinatam proportionem, sed vagam saltem, qualis est ipsa quantitas. At linea recta dum *indeterminata* est, *data* non est; hoc est, magnitudine data non est, licet positione dari possit; Linea igitur indeterminata, *magnitudo data*, non est; Et ad præsens negotium non spectat: linea verò data, est determinatæ magnitudinis, &, ad aliam quamvis datam, determinatam habet rationem.

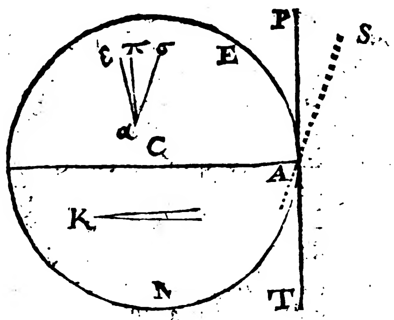
Posteriori sensu, prout *Infinitum* significat id quod *positivè infinitum* sit, adeóq; omnes terminos possibiles actu excedat; ego planè nego, ejusmodi *rectam infinitam* omnino dari posse: adeóq; nihil mirum videbitur, quantitatis impossibilis impossibilem esse rationem, seu proportionem; quod autem impossibile est, illud non est; adeóq; cum infiniti ad finitum ratio sit impossibilis, ejusmodi ratio nulla est, sive non est. At interim, magnitudinum inæqualium *datarum*, ratio etiam datur, (per 1. Dat. Euclid.) & propterea, si angulus contactûs & rectilineus sint quantitates inæquales verè datæ, dabitur etiam eorum ratio; & quidem, si anguli sint, erunt homogenei.

Deniq; (ut nihil prætercam, a Clavio allatam, quod alicujus momenti, hac in re, videri possit) hujusmodi forsan ratiocinium ex ipsius dictis (pag. 262.) colligi poterit Si duorum angulorum mutuò applicatorum duo crura homologa invicem congruant, reliqua verò duo crura non congruant, illi anguli non sunt æquales: At anguli contactûs crus alterum, nempe recta contingens, anguli rectilinei cruri superimpositum, congruere potest, at interim crus reliquum reliquo cruri non con-

 gruet

gruet (quia curvum recto non congruet;) Ergo nulli angulo rectilineo æqualis est angulus contactûs; adeóq; neo ullam habebit ad angulos rectilineos rationem.

Respondeo 1°. Eodem argumento sequeretur etiam angulum E A S (peripheriâ & rectâ secante comprehensum) non minus quam E A P (angulum contactus) non modo nulli an-



gulo rectilineo possibili æqualem esse (quia nempe si crus alterum A S, anguli rectilinei cruri alterutri superponatur & congruat, reliquum tamen A E reliquo congruere non potest) quod fortè concederet Clavius: verùm propterea nullam esse rationem hujus ad illum, nempe anguli E A S ad quemvis possibilem rectilineum; quod tamen ne quidem Clavius diceret; non enim negare posset angulum E A S, saltem multiplicatum, posse angulum rectilineum, saltem aliquem, superare; præsertim cum citra dubium sit, ipsum E A S angulum mistum, rectilineo P A S vel majorem esse vel saltem æqualem. Argumentum igitur allatum, ne quidem Clavio judice, quicquam præstabit.

Ut autem non solum retorqueam argumentum, sed & nodum solvam; Respondeo 2°. Verum quidem esse, quòd, si duorum angulorum æqualium duo crura homologa congruant, congruent etiam & reliqua duo crura, tamdiu scilicet quam eorum utrumq; eandem retinet inclinationem, quæ fuit in ipso puncto concursus (vel etiam ubi utrumq; simul æquè ab illâ inclinatione deflectat:) at vero si alterum suam quam in puncto concursûs habuit inclinationem retineat, reliqua verò suam mutet, illa non diutiùs congruent. At vero hoc in angulis mi-

stis

ctis (sive angulis contactûs sive aliis) ad rectilineas comparatis perpetuo accidit; propterea quod curva inclinationem suam in singulis punctis mutet, recta vero eandem semper inclinationem retineat; adeóq; quamvis earum in ipso contactûs puncto eadem fuerit inclinatio, postquam tamen ab eo recessum est fiunt earum inclinationes ad invicem alia atq; alia. Non igitur sequitur, angulum mixtum angulo rectilineo æqualem esse non posse, quamvis non utraq; eorum crura, extra punctum contactûs, congruant. Atq; ita ea quæ Clavius adduxit, ut probet angulum contactûs & rectilineum heterogeneos esse, & non ejusdem generis ut inter eos aliquam rationem esse dicatur, satis refelli judico; adeóq; nihil superesse quò minus argumentum ex 1 e 10 desumptum legitimè concludat.

CAP. VII.

Angulorum Planorum ὁμογένεια confirmatur.

VErùm nequis existimet, id satis non esse, ea quæ in contrarium allata sunt refellisse; nisi & affirmative concludam, Angulum contactûs, si quidem angulus sit, reliquis angulis planis, & nominatim rectilineis, homogeneum esse: Sic argumentor.

1°. Quæ mutuò possunt vel addi vel auferri; ea non sunt heterogenea: (Quis enim unquam Lineam Solido, aut Superficiem Numero, vel addi posse, vel auferri dixit? Possunt quidem ἀσύμμετρα, sive incommensurabilia, invicem & addi & auferri, ut in Binomiis & Apotomis notum est, & passim in X Euclidis: Heterogenea vero non possunt, sed plane sunt ἀσύμβλητα.) At angulus contactûs, si quidem sit angulus, & recto auferri potest, ut maneat angulus semicirculi internus; & recto adjungi potest, ut fiat angulus semicirculi externus: (atq; idem ostendi potest si ad alios quosvis angulos planos comparetur:) Non est igitur Heterogeneus.

Hujus autem argumenti vires, vel quod Peletarius monuerit, vel quòd ipse præsenserit, conatur Clavius quantum potest, frustra tamen, declinare. Ideóq; negat se Angulum contactûs asserere rectilineo simpliciter Heterogeneum esse, sed *quodammodo diversi generis*, (eo nempe quòd angulum rectilineum quantumvis

vis multiplicatus superare nequeat:) &, licet quoad alia homogeneus sit, *non censeri* tamen *ejusdem generis. quod ad proportionem attinet* At vero quo pacto ea, quæ quoad alia sunt homogenea, sint quoad rationem heterogenea, ego plane non video. Euclides certe 3 d 5, ubi Rationem definit, Homogenea, non dubitat esse, quoad rationem homogenea: Est enim, inquit, λόγος *ratio*, δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, *duarum magnitudinum, ejusdem generis, mutua quædam quoad quantitatem habitudo.* Siquæ igitur duæ quantitates homogeneæ sint (prout Clavius non negat hos esse angulos) earum mutua ad invicem quoad quantitatem habitudo *Ratio* dicitur.

Quod autem attinet ad ejusmodi quantitates homogeneas, sive ejusdem generis, quarum altera quantumvis multiplicata reliquam nunquam superabit: Euclides nullas agnoscit tales esse; sed ῥητῶς asserit, 5 d 5, Quantitates omnes, quarum una ad alteram *Rationem habere* dicendæ sunt, (hoc est, per 3 d 5, omnes quantitates *homogeneas*,) ita esse constitutas, ut *multiplicatæ se mutuo superare possint*, Et propterea, in 1 e 10, illud postulatum assumit, quasi per se notum, quódq; demonstratióne non indigeat, *Quantitatem quamlibet minorem toties multiplicari posse ut tandem majorem quamlibet assignatam superet.* Nam in ipsa constructione seu κατασκευῇ ad illam demonstrationem, statim jubet *Magnitudinem minorem assignatam toties multiplicare, donec majorem assignatam superet*; quasi quidem illud fieri posse nemo dubitaverit. Et similiter Archimedes passim. At neq; Euclides neq; Archimedes, illud fieri posse, in aliis sive angulis sive quantitatibus, magis quam in ipso angulo contactùs, usquam ostendit. Vel igitur universaliter verum est, & postulandum, Quamlibet quantitatem minorem toties posse multiplicari ut quamlibet majorem assignatam superet; vel saltem Euclides aut Archimedes illud specialiter de quibusdam quantitatibus demonstrassent, quibus illud convenit, & non tanquam universaliter verum & per se cognitum postulassent. Poterat etiam Clavius meminisse, se Euclidem reprehendisse, quod axiomate 11 (vel, secundum aliòs, postulato 5) assumpserit, *duas rectas ad invicem in eodem plano inclinatas, si producantur, tandem concurrere*; quoniam hoc, quamvis verum sit, non tamen gratis assumendum erat sed demonstrandum, ideo nempe quia in lineis curvis hoc non constat (de quibus nec Euclides illud asserit.) Ideóq; Clavius

ad

ad 28 e 1 illud demonstrat; iis tamen ibidem assumptis quæ & nihilo minus dubia sunt, & quæ eodem ipso nomine sunt reprehendenda. Quam justa autem ista sit Euclidis reprehensio, non hic vacat inquirere: at saltem eadem ratione, ne dicam longe majori, reprehendendus esset tam ille quam Archimedes, si modo hoc postulatum, quod indiscriminatim assumitur, non esset universaliter verum: atq; Clavius, Euclidis reprehensor, illud (si posset) demonstrasset de aliis omnibus quantitatibus verum esse, quamvis de angulis contactuum verum non sit. Quodsi neq; Clavius, neq; quispiam alius poterit demonstrare, aliis quantitatibus magis illud convenire quam hujusmodi angulis (si saltem sint anguli & vere quanti;) concedendum erit illud universaliter verum esse, prout Euclides & Archimedes videntur sensisse.

2° Sic ulterius arguo, Duæ quantitates, quarum altera major altera minor est, sunt inter se *Homogeneæ*, & quidem (si illud interponere necesse sit) *quoad Rationem* homogeneæ: Sed angulus contactûs, si quidẽ sit angulus, & angulus quivis rectilineus, ejusmodi sunt quantitates. Ergo Propositionẽ minorem demonstrat Euclides 16 e 3. Major propositio pariter videtur indubitata: Nam quæ rationem habent ad invicem sunt homogenea, per 3 d 5. At quæ se habent ad invicem ut majus & minus, ea saltem ad invicem Rationem habent. Quî enim fieri potest ut quantitas quantitate minor sit, in nulla tamen Ratione minor? Imò verò, Quantitatem quantitate minorem esse, nec tamen ad illam Rationem habere, est contradictio in adjecto; nam ipsum *minus esse* est *rationem habere*. Atq; hoc quidem ne ipse Clavius negare debet; nam & ille Proportionem sive Rationem (quæ apud illum tantundem significant, ideóq; & hic passim promiscue usurpantur) dividit in proportionem Æqualitatis & proportionem Inæqualitatis, & hanc iterum subdividit in proportionem Majoris Inæqualitatis, & Minoris Inæqualitatis, sive Majoritatis & Minoritatis: Adeò ut quicquid sit alteri vel Æquale vel Inæquale, quicquid altero Majus est vel Minus, illud saltem Rationem habet. Si igitur angulus contactûs sit revera Angulus, sitq; angulo rectilineo Minor, habebit ad illum rationem Minoritatis, sive Minoris Inæqualitatis; Quæ autem rationem habent, ea possunt multiplicata se mutuo superare: At angulus contactûs, quantumvis multiplicatus, rectilineum

non superabit; ideóq; nec rationem ad illum habet; quare nec est quantitas minor, nec quidem omnino quantitas.

Huic argumento nihil omnino est quod Clavium opposuisse reperio; Flussatem tamen legerat ubi hoc innuitur (laudat enim) adeóq; hanc difficultatem non tam ignoravit quam dissimulavit; nisi potius dici poterit, non illi incubuisse illas difficultates solvisse, quas, quamvis ipse noverit, Peletarius tamen non objecerit.

At Flussas Candalla, ad 16 e 3, Fatetur quidem rationem inæqualitatis concedendam esse inter angulum contactûs & rectilineum: verùm laxiorem esse hanc proportionem, ait, quæ intercedere potest inter illa quæ sunt diversi generis; at verò particularem certámq; rationem inter ea tantum intercedere quæ possunt multiplicata se mutuo superare.

At ego, quorsum se torqueant Mathematici, ut subterfugia tam tenuia tanto negotio exquirant, certe non video; cum possent hæc omnia quæ urgentur incommoda facillimo negotio devitare, modo fateri vellent, prout res est, Angulum contactûs esse revera non-angulum.

Clavius autem, quamvis Flussatem legerat, adeóq; ipsius responsum huic difficultati viderat, mallet tamen (ut videtur) totam hanc difficultatem dissimulare, quam tam leve responsum obtendere, dum tamen quicquam fortasse solidius quod opponat non habuit.

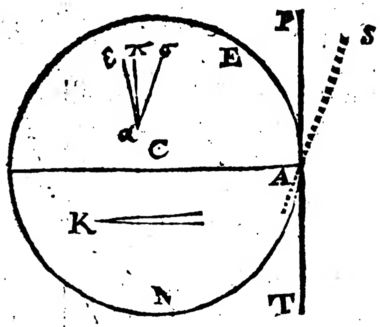
Flussati vero sic respondeo. Nobis quidem sufficere modo concedatur ratio inæqualitatis: Non enim postulat vel Euclidis vel Archimedis propositio, cui innititur argumentum, ut propositæ magnitudines sint *in certâ aliquâ ratione* inæquales, (puta in ratione multiplici, superparticulari, &c.) sed solummodo, ut habeant *rationem inæqualitatis: Datis* (inquiunt) *duabus magnitudinibus inæqualibus, &c.*

Hæc autem cùm scripseram, Flussatem paulo accuratius intuitus, comparatis item quæ ipse alibi habet ad 3 d 5 & 1 e 10; video illum, per *rationem incertam, confusam, indeterminatam*, nihil aliud velle, quàm ἄρρητον, ἄλογον, *surdam* vel *irrationalem*: adeóq; concedit ille id quod jam contendimus, nempe *angulum contactûs ad angulum rectilineum rationem habere propriè dictam* (modo scilicet quantitatem esse constet) illam scilicet quam vult Euclides 3 d 5 & 5 d 5. (adeoq; illum hac in re adversarium non habeo,)

beo;) *irrationalem* tamen esse hanc rationem existimat, nec veris numeris explicabilem. Sed & affirmat, angulum contactûs verum anguli quantitatem habere, eamq; quantitatem talem esse quæ multiplicata quantitatem anguli rectilinei superare poterit; non quidem manente angulo contactûs, sed mutato angulo contactûs in rectilineum; eodem scilicet modo quo angulus rectilineus acutus ita multiplicari potest, ut (mutatâ tamen specie anguli) rectum superare possit: Et, quo sensu acutus rectilineus est minor omni recto vel obtuso possibili, eodem (nec alio) & angulum contactûs esse minorem omni acuto possibili, posse tamen (mutatâ anguli specie) multiplicatum acuto rectilineo majorem fieri, sicut & acutus rectilineus (mutatâ specie anguli) multiplicatus evadit recto major, aut etiam obtuso. At hæc quomodo cum iis, quæ ab Euclide demonstrantur ad 16 e 3, constare poterunt, ipse viderit.

Verùm si tanti illud esse putet vel Flussas, vel quispiam alius, ut non modo ostendantur hæ magnitudines (si saltem utraq; sit verè magnitudo) *inæquales*, sed & *in certa aliqua ratione inæquales*, saltem vel rationali vel irrationali; Ego hoc facile probaturus sum sequenti argumento.

3° Igitur, dimittamus aliquantisper angulum contactûs EAP, & tractemus angulum semicirculi: Est, inquã, angulus semicirculi EAC non modò alicui angulo rectilineo *inæqualis*, sed & in *certa aliqua ratione* inæqualis; talem saltem rationem habet, qualem vult Euclides in 5 d 5: Potest enim, saltem multiplicatus

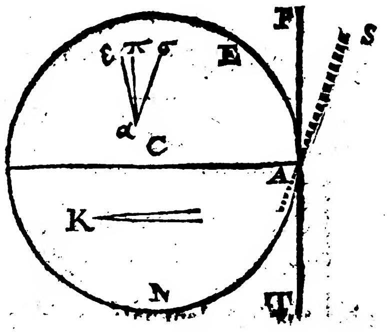


angulum rectum rectilineum superare. Quod neq; Clavius neq; quisquam alius negabit. Adeóq; angulus semicirculi, fatente Clavio, ad angulum rectum rectilineum, rationem certam & determinatam habet, quamvis illa fortasse cognita non esset.

At, per 5 Datorum Euclidis, *Si magnitudo ad sui aliquam partem habeat rationem datam, etiam ad reliquam habebit rationem datam*: adeoq; si angulus rectus rectilineus P A C, ad sui partem, nempe angulum semicirculi E A C (si saltem angulus semicirculi sit ipsius pars, & non potius ipse totus) rationem datam habeat, habebit & rationem datam ad partem reliquam E A P angulum contactûs: Et quidem, pari de causâ, si ad illum rationem *dabilem* habeat, quippe certam & determinatam, habebit & ad hunc rationem *dabilem*, certam puta & determinatam. quod ostendendum erat.

Deniq;, quoniam ideo præsertim Clavius angulum contactûs rectilineis homogeneum esse non putat, neq; ad illos rationem ullam habere, quòd nulli rectilineo possibili æqualis esse possit; (quanquam illud leve sit argumentum; nam, verbi gratia, $\sqrt{2}$ nulli numero æqualis est, aut esse potest, cum sit latus surdum, non tamen est planè heterogeneum quid, neq; nullam omnino rationem habet quamvis non, ut loquuntur, rationalem:) conabor utcunq; & illud probare; nempe Angulum contactûs, si verè sit angulus, esse rectilineo alicui possibili æqualem, sequenti argumento.

4° Ostensum est supra, angulum curvilineum E A S, recti-



linco

lineo cuivis homogeneum esse, atq; ad illum rationem proprie dictam habere, per 5 d 5, quia potest, saltem multiplicatus, rectilineum superare. Si verò sit rectilineis homogeneus, adeóq; v. g. ad rectum rectilineum veram rationem habeat, erit saltem alicui rectilineo æqualis: erit enim vel hic aliquanta pars recti, vel rectus hujus, vel deniq; erunt æquales: angulos autem rectilineos ad invicem in quâcunq; ratione constitutos in rerum naturâ possibiles esse, vix quisquam Mathematicus negabit; cum illud omni quantitati continuæ, propter ipsius divisibilitatem in infinitum, competere receptum sit; atq; hoc, si non Clavius, saltem Flussas expresse agnoscit, in iis quæ decimo Euclidis præmittit. Esto igitur angulo misto E A S, æqualis rectilineus *εασ*: est autem hic vel æqualis ipsi P A S, vel saltem ipso major, (minor enim esse non potest, quoniam P A, cum tangens sit, extra peripheriam cadat, per 16 e 3.) si æqualis sit, conceditur quod erat probandum, nempe angulum *εασ*, hoc est E A S, æqualem esse ipsi P A S, ideóq; angulum E A P nihil esse: Si vero *εασ* sit ipso P A S major, auferatur inde *πασ* ipsi P A S æqualis, per 23 e 1, & manebit *εαπ* ipsi E A P æqualis, per 3 a 1. hoc est, angulus rectilineus angulo contactûs æqualis. At dicetur, Euclidem demonstrâsse hoc esse impossibile, ut angulus contactûs sit rectilineo æqualis. Recte quidem; atq; illud ego agnosco. Sed inde sic disputo; si angulus contactûs sit verè angulus, erit alicui rectilineo æqualis, per ea quæ jam demonstravimus: At nulli rectilineo est æqualis, per ea quæ demonstrat Euclides 16 e 3: Ergo non est vere angulus. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Atq; hactenus principale Peletarii argumentum, ex 1 e 10 desumptum, ab iis quæ in contrarium afferuntur vindicavi; adeo ut ipsius sequela inconcussa maneat; atq; simul angulos planos tam curvilineos quam mistos rectilineis homogeneos ostendi.

CAP. VIII.

Honoratissimi Equitis D. HENRICI SAVILII Testimonium hac in re.

LIbet tandem hic subjungere, quæ inter Honoratissimi Equitis, D. *Henrici Savilii* (Patroni seu Fundatoris nostri Muniticen-

nificentissimi) schediasmata alicubi ; de quantitatibus Homogeneis, reperio inter scripta quædam illius imperfecta nondum digesta, de mensuratione Circuli, (quæ, ut videtur, adversus Josephi Scaligeri Cyclómetrica inchoaverat,) de Ammonio, qui circuli quadraturam, propter ἀνομοιογένειαν linearum rectæ & curvæ, impossibilem esse putavit, Patronus ille noster (qui duos Mathematum Professores publicos suis sumptibus instituit) idemq; acutissimus Mathematicus, hæc habet ; “ Stultissi-
“ mus Ammonius, ut est apud Simplicium, putavit ideo circu-
“ lum quadrari non posse, quod non homogeneæ essent recta
“ linea & circularis. Quo quid dici potuisset ineptius ! Quid ?
“ non ea proprie homogenea sunt, quæ & proprie majora sunt
“ alia aliis & proprie minora ? Verbi gratia; Linea & Superfi-
“ cies heterogenea sunt, sic Superficies & Corpus, & plane ἀ-
“ σύμβλητα, neq; enim linea proprie vel major vel minor dici
“ potest superficie, nec superficies corpore, neq. enim inter se
“ proportionem habent aut habere possunt. Nam, ut ait Ma-
“ gister noster, rationem habere inter se magnitudines dicuntur
“ quæ possunt multiplicatæ se invicem excedere. Sed quadra-
“ tum circulo inscriptum minus est, propriè & non καταχρησ-
“ τικῶς loquendo, & circumscriptum majus. Et, de proportione
“ rectæ lineæ & circumferentiæ, ostendit Archimedes, circum-
“ ferentiam minorem esse quam $3\frac{1}{7}$ diametri, majorem vero
“ quam $3\frac{10}{71}$. Et quidem omnis linea omni lineæ est ὁμογενής.
“ Nemo etiam unquam doctus dubitavit, in rerum natura esse
“ quadratum circulo dato æquale, etsi in eo investigando δι' ἐπι-
“ πέδου δείξεως, i e. per circulum & rectam lineam, sudarunt
“ omnes penè tam antiqui quam recentiores, non magno ta-
“ men successu, etsi alii aliis fuerint feliciores.

Ex his liquet, juxta Honoratissimi *Savilii* sententiam, omnino absurdum esse, ea pro Heterogeneis haberi, quæ proprie majora sunt alia aliis, & proprie minora. Non tamen dissimulabo, illum de angulo contactûs & semicirculi aliquantulum hæsitâsse; (& quid tandem conclusurus fuisset, si, re mature pensitatâ, inceptam illam disquisitionem perfecisset, non ausim asserere;) nam & hæc ad marginem adscripserat, “ Quamvis de
“ angulis κερατοειδοῦς & ἡμικυκλίου posset esse quæstio, qui mihi
“ videntur proprie λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα per 3 d 5. nam
“ proprie alter minor est omni acuto rectilineo, & alter major

ne-

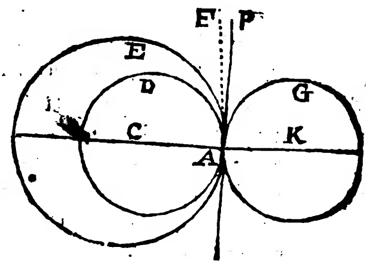
" neq; tamen potest κερατοειδὴς, utcunq; multiplicatus, vel minimum excedere rectilineum, quia minimus rectilineus potest infinite dividi, Sed & statim subjungit. *def.* 3ª *&* 5ª Vi *libri irreconciliabiles.* Et quidem ego idem prorsus sentio; nempe, si statuatur angulum contactûs veram anguli quantitatem habere, definitiones illas duas simul esse veras non posse: At, si concedatur, angulum illum veram anguli quantitatem non habere, sed esse angulum tantummodò imaginarium; neq; inter se pugnabunt definitiones illæ, neq; cum 16 e 3 aut 1 e 10, aut cum aliâ quavis quam vel apud Euclidem vel Archimedem (ne plures nominem) uspiam exstare scio.

CAP. IX.

Argumentum tertium; ab æqualibus similium segmentorum angulis desumptum.

SEquitur aliud Peletarii argumentum examinandum. Illud verò huic Lemmati innititur, nempe, *Angulos similium segmentorum, saltem semicirculorum, esse æquales.* Cujus Lemmatis veritatem mox examinabimus. Interim, eo quasi concesso, hæc inde deducit Peletarius Theoremata.

1. *Contactus circulorum interior, quantitas non est.* Nam si semicirculorum anguli C A D, C A E, sint æquales, contactus interior DAE quantitas non erit, quoniam sive addatur sive auferatur quantitatem datam non immutat.



2. *Contactus lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.* Nam si angulus D A P sit quantitas, partes habebit, ideóq; divisibilis erit; nempe vel per rectam ut F A, quod fieri non posse ostendit Euclides 16 e 3; vel saltem per curvam, puta E A circumferentiam majoris circuli, uti ponit Clavius; sed neq; per hanc, quia D A E non est quantitas, ut jam ostensum est: Sed neq; per aliam curvam, quæ non sit periphe-

ria EA, angulum DAP non dividat, nihil est quod suadeat hoc magis fieri posse per aliam quamvis curvam.

3. *Contactus circulorum exterior, quantitas non est.* Cum enim nec EAP, nec GAP, sit quantitas, (per præced) neq; erit EAG quantitas, eorum scilicet aggregatum.

4. *Anguli qui fiunt a diametro & peripheriâ, sive intra sive extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.* Nam, cum DAP non sit quantitas, erunt anguli DAC, DAK, æquales rectis rectilineis PAC, PAK.

Hæc Theoremata, ex illo Lemmate concesso, fat evidenti consecutione inferri, non negat Clavius, neq; alii credo negabunt. Tota lis est de veritate istius Lemmatis; An scilicet *Anguli similium segmentorum, saltem semicirculorum, sint æquales.* Hoc Clavius negat. Videamus igitur quid in illius defensionem adduci possit.

Quid autem ipse Peletarius adduxit in ejus adversus Clavium Apologia, nescio quidem, quoniam illam Apologiam nondum mihi contigit videre. At in ipsius commentario quodam *De contactu linearum*, (ubi eadem fere habentur quæ & in commentariis ejus in Euclidem ad 16 e 3, cum aliqua tamen accessione,) nonnulla profert, quibus istius Lemmatis veritatem adstruere conatur; quæ mox examinabimus.

Præmittit autem, *Hoc pronunciatum, pro principio Geometrico merito haberi posse.* Et quidem mihi non iniquum videtur postulatum, ut concedatur; (quanquam non ignorem illud ob præsentem controversiam, vix alia quidem causâ, in dubium vocari.) Non enim ego omnino video, quo pacto figuræ *similes* dici possunt, nisi & homologa latera habeant proportionalia, & similiter ad invicem sita: At, quonam pacto, quæ angulos inæquales faciunt, adeóq; inæquales habent ad invicem inclinationes, interim similiter sita dicantur, ego prorsus non intelligo.

In figuris rectilineis, nemo dubitat, variationem angulorum mutare speciem figuræ, (non enim aliter differt Rhombus a quadrato;) &, figurarum specie datarum angulos etiam dari, (per def. 3. Datorum Euclidis:) & quare illud in curvilineis & mistis figuris non obtineret, nulla ratio assignari potest: Adeóq; semicirculi, nisi æquales habeant angulos, figuræ similes dici non deberent.

Atta

Attamen, e contra, si figuræ duæ ita sint constitutæ, ut in illis rectæ omnes similiter positæ, sint (respective sumptæ) proportionales, quomodocunq; ducantur; eorum latera & angulos omnes similiter posita esse, quis dubitaret? Nisi enim similis esset linearum inter se situs atq; curvatura (sed in hac anguli acutiores, & major flexuum curvatura, in illâ secùs) impossibile est, ut inscriptæ in una figura, proportionales sint similiter inscriptis in reliquâ: ut per se videtur satis manifestum viro Mathematico. At verò in semicirculis omnibus, (aut etiam segmentis aliis quibuscunq; similibus,) rectæ similiter inscriptæ sunt inter se proportionales; & quidem, proportionalium subtensarum, similes arcus sunt etiam proportionales; ut Mathematicis omnibus est notissimum: ideóq; & similes in omnibus curvaturas, & angulos æquales, videtur omnino dicendum esse.

Non ignoro quidem Euclidem aliter figuras similes rectilineas, aliter similia circulorum segmenta definivisse: Nempe *Similes figuræ rectilineæ definiuntur, quæ angulos sigillatim æquales habent, & latera quæ circa æquales angulos proportionalia.* 1 d 6. *Similia* verò *circulorum segmenta* definit, non quidem ex æqualitate angulorum *quos habent*, sed *quos capiunt*: 10 d 3. Non quasi similium segmentorum anguli essent inæquales; sed quoniam, ubi postea de similitudine segmentorum agendum esset, facilius esset quantitatem anguli in segmento, quam anguli segmenti, demonstrare.

Et quidem certissimum est; Euclidem ea κριτήρια definitionibus inserere, non semper quæ rei naturam intimius spectent, sed quæ secuturis demonstrationibus meliùs subserviant, Exsempli gratia. In ult. def. primi, definitur Parallelismus rectarum, ex *non-concurrentia, quamvis infinitè utrinq; producantur*; quod quidem in lineis rectis ejusdem plani, sat infallibile est criterium parallelismi: hoc autem κριτήριον præ aliis selegit, ut eò meliùs inserviret ea definitio demonstrationi prop. 27 e 1. ubi primo de parallelismo agendum esset. At interim nemo dubitare poterit, quin *æqualis ubiq; ab invicem distantia* intimius spectet parallelismi naturam, licet ipsius proposito nimùs fortasse conveniret. Nam certissimum est, multa *non-concurrentia* non tamen esse parallela, ut liquet ex rectis non in eodem plano; item ex circulis qui ita duci possunt, ut neq; sint concentrici, neq; tamen se

mutuo

mutuo secent, item ex conchoide cum sua recta, & ex linea hyperbolica cum sua ἀσυμπτώτῳ, aliisq; multis. At *Parallelismus* & *Æquidistantia*, vel idem sunt, vel certe se mutuo semper comitantur. Atq; idem de aliis non paucis definitionibus dicendum esse, nemo, qui rem serio perpendit, dubitare poterit.

Atq; illud proculdubio dicendum erit de similitudine figurarum. Quamvis enim Euclides ex re sua fuisse duxerit similitudinem aliter in figuris rectilineis, aliter in circulorum segmentis, definire, quò meliùs scilicet secuturæ demonstrationes procederent: Attamen non dubitandum est eandem utrobiq; communem similitudinis notionem tam Euclidem quam alios Geometras habuisse, licet non eodem semper medio eadem facilitate posset utrobiq; pro re nata demonstrari. Figuras enim similes esse (sive rectilineæ sint, sive curvilineæ, sive mixtæ; sive item planæ, sive gibbæ, sive concavæ; sive deniq; superficiales, sive solidæ) nil aliud in universum est, quàm, earum singulas partes homologas similiter tam ad se invicem quam ad totam sitas esse: Et quicunq; hoc demonstraverit de quibusvis figuris, quocunq; demum medio id fiat, demonstrabit illas similes esse. Non enim *similitudo* de similibus rectilineis, & similibus curvilineis Æquivoce prædicatur, (secundum aliam atq; aliam significationem) sed planè univoce.

Cùm igitur angulorum æqualitas, (sine qua nec eadem erit partium ad invicem inclinatio, aut similis inter se positio,) in ipsa communi Similitudinis notione includatur; non esset iniquum postulatum ut hoc pro principio per se noto concedatur, (utpote quod ex mera terminorum explicatione immediate resultat,) *similium figurarum angulos esse æquales.*

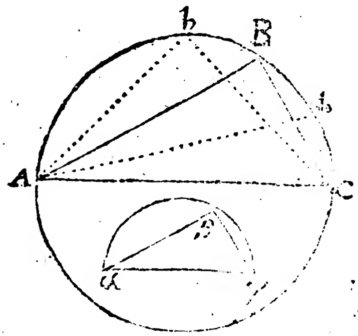
CAP. X.

Similium segmentorum angulos æquales esse, ulterius confirmatur.

QUamvis autem hæc æqualitas angulorum in figuris similibus, satis videatur manifeste in ipsa *Similitudinis* notione contineri, ut jam dictum est; adeoq; veritatem illius assertionis, *Semicirculorum angulos æquales esse,* tanquam pronunciati sua luce noti concedendam esse: Attamen, quoniam, ob præsentem controversiam, illud in dubium vocatur; attulit Peletarius nonnulla

nonnulla quibus sententiam suam hac in re confirmet, Quæ si cui forsan, prout ab ipso proferuntur, minùs satisfaciant, conabor illa & explicare & confirmare, aliáq; prout res tulerit adjungere. Quanquam non ignorem eò difficiliorem mihi incubituram provinciam, quò minùs distet assertio probanda a principio per se concedendo, quasi suâ luce cognito. Quando enim de hujusmodi propositionibus, quæ vel principia sunt vel principiis proxima, oritur controversia; difficilius reperitur Medium quo probetur, quod sit ipsa re probanda minus dubium: cùm tamen nisi ex præconcessis & notioribus nulla procedat legitima argumentatio. Non tamen ob hanc difficultatem quicquam diffido rem illam satis Geometrice demonstrandam fore.

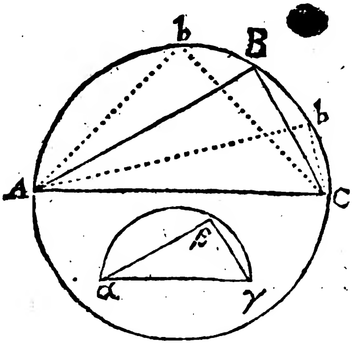
1° Argumentum desumam ex 10 d 3, quæ est similium segmentorum definitio. *Similia circuli segmenta, sunt, quæ angulos capiunt æquales; aut, in quibus anguli sunt inter se æquales.* Peletarius hinc urget, eadem anologia & *segmentorum angulos* æquales censendos esse non minùs quàm *angulos in segmentis*: Hoc est, qua ratione anguli rectilinei A B C, $\alpha\beta\gamma$, in similibus segmentis æquales sint habendi; eadem & angulos mistos BCA, $\beta\gamma\alpha$, item BAC, $\beta\alpha\gamma$, æquales etiam habendos esse. Quodego quidem verum esse nn dubito. Nam nisi peripheriæ A B C, $\alpha\beta\gamma$, eandem habeant inclinationem ad suas subtensas AC, $\alpha\gamma$, non erunt ad illas similiter positæ, adeóq; neq; figuræ similes erunt. At si eadem utrobiq; inclinatio, tum & idem utrobiq; angulus per def. anguli plani.



2° Sed, quoniam Euclides in hac 10 d 3 illud non ῥητῶς de angulis segmentorum, sed de angulis in segmentis, verba facit; ego inde paulò aliter argumentum instituam, assumpta etiam 21 e 3, nempe, *In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se æquales.* Unde sequitur, angulum A B C tantundem

 prorsus

prorſus eſſe ubicunq; in ea peripheria ſumatur punctum B, eundem nempe cum eo qui eſt in ſimili ſegmento $\alpha\,\beta\,\gamma$. His poſitis, ſupponamus rectam A B (quantum opus eſt prolongatam) puncto A manente, circumduci; adeóq; peripheriam ſecare in variis ſucceſſive punctis B, B, B, &c Et ab his punctis ſectionum rectas B C, B C, B C &c. duci, ad idem punctum C. Manifeſtum eſt, prout punctum B ad punctum C propiùs accedit, rectam A B longiorem fieri (modò ſegmentum propoſitum non excedat ſemicirculum) & B C breviorem, (angulo interim A B C non mutato,) uſq; dum rectâ A B ad ipſam A C accedente, idem fiat punctum B & C, hoc eſt, recta B C in unicum peripheriæ punctum degeneret, adeóq; recta B C (quanta quanta ſit) jacere ſupponitur in ipſa peripheria; adeóq; recta A B, ad ſitum A C delata eoſdem nunc angulos cum peripheria facit quos prius fecerat cum recta B C. producta, nempe angulum A B C, ejuſq; reſiduum ad duos rectos; hoc eſt, angulum inferiorem (qui eſt oppoſiti ſegmenti angulus) eundem cum angulo A B C, atq; (eadem ratione) angulum ſuperiorem eundem cum ipſius complemento ad duos rectos. Sed & idem prorſus eveniret in ſimili ſegmento $\alpha\,\beta\,\gamma$, adeóq; & illic $\alpha\,\beta$, ad ſitum $\alpha\,\gamma$ delata, eoſdem angulos facit ad peripheriam quos prius fecerat ad $\gamma\,\beta$ (ultra punctum β productam) hoc eſt, eos quos A B ad rectam B C (productam) fecit. Adeóq; ſimilium ſegmentorum A B C, $\alpha\,\beta\,\gamma$, licet inæqualium, (quod etiam oppoſitis eorum ſegmentis accidit,) anguli ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.



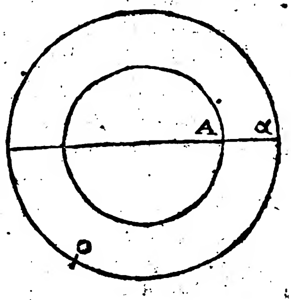
Atq; etiam eadem opera demonſtratum eſt; ſi ſegmenta illa ſimilia ſint ſemicirculi, eorum angulos æquales eſſe rectis rectilineis; erit enim in ſemicirculo, tam angulus A B C, quam ipſius reſiduum ad duos rectos, angulus rectus,

Item, in univerſum, Angulus in ſegmento, æqualis eſt angu-

lo segmenti oppositi. Seu, quod idem est, Angulus in peripheria segmento insistens, est æqualis angulo istius segmenti cui insistit.

3° Idem sic evincitur. Angulus B A C tantus est quantus semissis peripheriæ B C, per 20 e 3, (hoc est, angulus B A C est ad quatuor rectos, ut semissis peripheriæ B C, ad integri circuli peripheriam.) Ideoq; si eousq; divaricentur A B, A C, donec ipsum B (sectionis punctum) perveniet ad punctum A, (ipsaq; A B degeneret in punctum,) erit angulo B A C, oppositus integer semicirculus; ideóq; angulus B A C rectus est. Et, quoniam idem accideret in quovis semicirculo, igitur anguli semicirculorum sunt æquales, nempe recti omnes. Sed & idem ostendi potest, etiam in aliis similibus segmentis. Ergo similium segmentorum anguli sunt æquales; tanti nempe quantus istorum peripheriarum semisses.

4° Idem hoc modo probatur. Quoniam in semicirculo angulus A B C rectus est, per 31 e 3; ideoq; anguli B A C, B C A, simul, æquales recto, per 32 e 1: Si igitur recta A B moveatur usq; dum perveniat ad situm A C, angulus B A C evanescit sive nullus erit, ideóq; B C A (qui jam fit angulus semicirculi) rectus erit; nam quod aufertur angulo B A C, additur angulo B C A, ut nempe ambo æquentur uni recto. Atq; idem ostendi potest in aliis segmentis similibus; nam, per 32 e 1, erunt B A C, B C A, simul, æquales residuo anguli A B C ad duos rectos; ideóq; cum A B C, in eodem vel similibus segmentis, semper idem maneat, erit summa angulorum B C A, BAC, eadem; adeóq; cum B A C prorsus evanescit erit reliquus B C A ipsi summæ æqualis. Similium igitur segmentorum anguli sunt æquales.

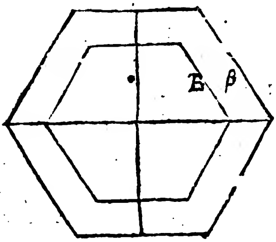


5° Idem arguo ex natura Parallelismi. Nam, ductis pluribus circulis concentricis, recta per centrum illos secans faciet angulos alternos æquales. Ideo semicirculorum anguli A, α, quamvis inæqualium æquales sunt.

Dicetur forsan, illud quidem valere in parallelis rectis, per

29 e 1. non autem in lineis curvis utut parallelis.

Respondeo; Illud quidem speciatim ab Euclide demonstrari de parallelis rectis: At verò non minùs verum est de parallelis quibuscunq; Non enim hoc oritur ex linearum rectitudine, sed ex earum parallelismo. Hujus enim affectionis vera causa hæc est: quoniam si, verbi gratia, rectæ B, β, parallelæ sint, erunt æqualiter ubiq; ab invicem distantes: At hoc non fiet nisi quanta sit unius versus alterā inclinatio, tanta sit & hujus ab illa reclinatio: si enim recta β ad rectam B magis inclinet, quam hæc ab illa reclinat, erit earum ad invicem appropinquatio; si contra, elongatio; non autem eadem manebit distantia. Sed & idē omnino sequeretur in curvis: Nam, si peripheria α (*fig. præced.*) magis inclinet ad peripheriam A, quam hæc ab illa reclinat, vel cōtra; necesse erit ut earum distantia ab invicem mutetur, neq; cōstans maneat; quod tamen earum parallelismus supponit. Cum igitur eadem sit utrobiq; affectionis hujus causa, eadem erit utrobiq; affectio, sive in rectis sive in curvis; nempe recta parallelas secans angulos alternos æquales faciet: Et propterea, anguli semicirculorum, utut inæqualium, æquales erunt.



6° Addo etiam; cùm illud in figuris aliis regularibus omnibus accidat, ut nempe in figuris similibus rectæ similiter positæ æquales respectivè angulos cum perimetris faciant; non credendum est illud in circulis secus esse: Eadem enim est omnino ratio in figuris trium, quatuor, quinq;, sex, aut quotviscunq; laterum, sive sint numero finita sive infinita; adeóq; & in circulo.

Verissimum quidem est, ejusmodi affectiones, quæ, in figuris regularibus, quoad mensuram decrescunt, prout laterum numerus augetur, aut contra; eas in circulo (qui est quasi polygonon infinitorum laterum) prorsus evanescere. Ut, verbi gratia, differentia rectarū quæ a centro ad latera perpendiculariter ducuntur, ab ipsis rectis quæ a centro ad angulos ducuntur; hoc est, rectarum a centro brevissimæ & longissimæ differentia: (ideoq;

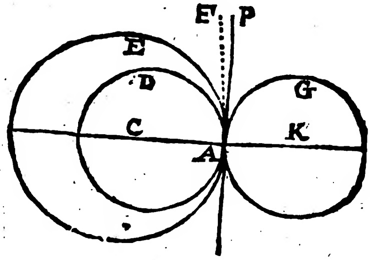
(ideóq; & differentia similium figurarum circumscriptæ & inscriptæ eidem circulo:) est enim (cæteris paribus) in figuris plurium laterum minor differentia; adeoq; in circulo nulla. Item, in figuris plurium laterum, anguli in perimetro majores sunt quàm qui in perimetris laterum pauciorum, adeóq; in circulo evanescunt, cujus tota perimeter est ideo una linea, indirectum posita, licet non recta. Atq; idem in similibus aliis affectionibus ostendere liceret.

At affectiones ejusmodi quæ æqualiter se habent & invariatè in figuris omnibus regularibus, sive sint plurium sive pauciorum laterum, æqualiter etiam se habebunt in circulo, sive polygono laterum infinitorum. quæ enim non omnino dependent a laterum numero, sed a figuræ regularitate, eodem prorsus modo se ubiq; habebunt. Verbi gratia. Rectangulum, recta a centro ad perimetrum perpendiculari, & semisse perimetri, contentum, æquatur areæ figuræ regularis quotcunq; laterum; ut notum est: ideóq; & in circulo illud obtinet; quod ostendit Archimedes lib. de dimensione circuli. Item Polygona similia sunt ad invicem in duplicata ratione homologorum laterum, (vel etiam rectarum quarumvis similiter positarum,) per 20 e 6: Sed & idem de circulis verum est, per 2 e 12. Item, Pyramis est triens prismatis in basi & altitudine iisdem vel æqualibus constituti: sed & eadem est ratio Coni ad Cylindrum, per 10 e 12. Atq; idem prorsus liceret ostendere in aliis affectionibus innumeris; quæ, si omnibus figuris rectilineis regularibus quotcunq; laterum indiscriminatim conveniant, nulla consideratione habita ad laterum numerum, eædem & circulis pariter convenient. Adeóq; cùm in aliis figuris quibuscunq; similibus, utcunq; inæqualibus, rectæ similiter positæ similes cum perimetro angulos faciant; quidni & idem de circulis, aut circulorum segmentis dicendum esset? præsertim cum nihil solidæ rationis in contrarium adduci possit.

CAP. XI.

Objectioni in contrarium respondetur.

QUod enim in contrarium ostendi solet, hoc unicum est; Angulum semicirculi minoris, ut D A C, ideo minorem videri quam est angulus semicirculi majoris E A C, quia mi-

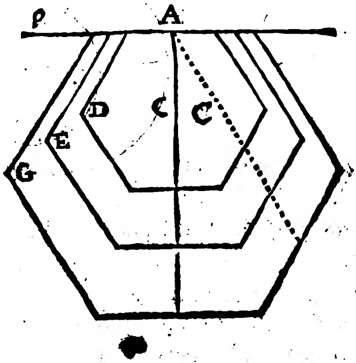


nor peripheria introrsum recedens a majori statim resilit, adeóq; partem solummodo anguli E A C videtur abscindere, quæ igitur toto minor erit: Et quidem angulus contactûs (cum lineâ rectâ tangente) E A P, eâdem de causâ minor videtur quam angulus contactus D A P, cùm hujus crura magis videantur divaricari & ab invicem resilire.

Verùm hoc, si rectè perpendatur, nihil suadet in contrarium eorum quæ a nobis proferuntur. Non enim magnitudo anguli æstimanda est ex eâ quam habent crura divaricatione extra punctum concursus, sed ex eâ quam habent in ipso concursûs puncto. Adeóq; angulus E A P minor est angulo F A P (per 16 e 3,) non quod illius crura minùs divaricentur extra punctum contactûs, (nam E P, magis distant quam F, P.) sed propter minorem inclinationem, seu potius coincidentiam, linearum E A, P A, in ipso puncto A. Inquam, *in ipso puncto A*: Nam, quamvis, ut ostendit Euclides, inter rectam P A & peripheriam E A, alia recta, ut F A, cadere non possit; hoc est, quæ minorem habeat inclinationem ad rectam P A quàm habet peripheria E A: Attamen hoc de alio quovis puncto præter ipsum A dici non potest; nullum enim aliud est punctum assignabile in curvâ E A inter quod & rectam P A non possit alia recta

recta cadere. Nam quodcunq; assignetur punctum (quod non toto saltem semicirculo distet ab A) poterit ab eo ad rectam P A recta duci, quæ & extra peripheriam cadet (verbi gratia, quæ peripheriam tangit in puncto assignato) & cum recta P A (saltem producta) concurret, quæ tamen aliâ rectâ ut F A poterit secari; quæ igitur inter assignatum peripheriæ punctum & rectam P A cadet.

Addo etiam, ejusmodi divaricationem conspici in aliis figuris regularibus se mutuo contingentibus. Ut in Hexagonis D A, E A, G A, se mutuo contingentibus in A: quorum Perimetri et se mutuo deserunt, & rectam tangentem P A, quum primum suam quam in A habebant inclinationem mutant: at non propterea anguli CAD, C A E, C A G vel inter se differunt vel ab ipso C A P. (Atq; idem omnino eveniet sive recta C A sit Hexagoni lateri pendicularis vel ad alium quemvis angulum constituta, modo similiter posita sit in singulis figuris.) Quod autem de Hexagonis ostenditur; similiter eveniret, si, pro Hexagonis, statuerentur aliæ figuræ similes quotlibetcunq; laterum; ubiq; enim, in figuris similibus, rectæ similiter positæ, æquales cum perimetro angulos faciunt. Idem igitur & de circulis se mutuo contingentibus censendum est: Nam licet peripheriæ, propterea quod suam inclinationem in singulis punctis mutent, statim post contactûs punctum se mutuo deserant; non tamen in ipso contactûs puncto variam habuisse inclinationem, vel angulos inæquales cum recta eorum per centra transeunte fecisse, aut etiam cum alia quavis recta similiter posita, censendum est. Atq; hactenus de æqualitate angulorum, similium segmentorum, diximus.



CAP. XII.

Argumentum quartum, seu Argumentorum Classis quarta, quia quod omni positivâ quantitate minus est, est non-quantum.

ADjungam aliud Argumentum, seu potius aliam Argumentorum classem. Præmittam tamen hoc sive Axioma sive Postulatum.

Quod est omni positivâ Quantitate minus, illud est non-quantum.

Atq; hoc vel expresse assumitur, vel saltem tacitè innuitur; non modò apud Archimedem passim, in libris De Sphæra & Cylindro, De dimensione circuli, De quadratura Parabolæ, De lineis Spiralibus, De æqui ponderantibus, &c, Sed & passim apud Euclidem, ut in 2 e 12, 18 e 12, aliisq; propositionibus innumeris; & quidem in iis ferè omnibus quæ demonstrantur per deductionem ad absurdum seu impossibile.

Exsemplum esto 1a Archim. *de dimensione circuli*; in hunc sensum: *Circulus æqualis est triangulo rectangulo, cujus laterum angulum rectum comprehendentium alterum quidem æquatur circuli semidiametro alterum vero ejusdem peripheriæ*. Hanc autem propositionem hoc modo demonstrat. Si enim triangulum illud sit vel majus vel minus circulo proposito; esto, inquit, differentia æqualis spatio (verbi gratia) A, aut alii cuivis assignato. At hoc, inquit, fieri non potest; Quoniam possibile est figuram rectilineam circulo inscribere (quæ igitur circulo minor erit) quæ tamen ab illo triangulo minus deficiat quam est spatium assignatum A quantulumcunq; sit; item figuram rectilineam circulo circumscribere (quæ igitur major erit) quæ tamen triangulum illud minus excedat quam est assignatum spatium A, quantulumcunq; demum sit; quorum utrumq; ab eo demonstratur: Non est igitur triangulum illud vel majus vel minus, quam circulus propositus, spatio quovis assignabili quantulumcunq; sit; est igitur æquale.

At verò, quàm facilè esset & hanc & innumeras alias demonstrationes eludere, si modò dicere liceat, Differentiam illam esse quidem omni assignabili quantitate minorem, non tamen nullam; Ideóq; nec quantitates propositas esse æquales.

Vel

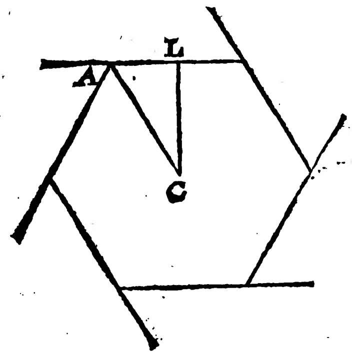
Vel igitur concedendum est, demonstrationem illam Archimedis, aliasq; ejusmodi innumeras, apud omnes Geometras receptas, sophisticas esse & plane fallaces; quod neminem sobrium dicturum existimo: vel, quod potius asserendum erit, Differentiam illam, quæ est omni assignabili spatio minor, nullum esse: hoc est, Quod omni assignabili quantitate minus est, id nihil est, sive non-quantum.

Hoc autem quod postulatur concesso, sic licebit argumentari.

1° Substituamus aliquantisper, pro circulo, Polygonum regulare rectilineum circulo inscriptum quotviscunq; laterum. Estóq; numerus laterum quantumlibet magnus, N; eritq; idem numerus angulorum Perimetri, (tot enim sunt anguli quot latera,) quorum angulorum omnium aggregatum erit æquale angulis rectis $2N-4$, (per ea quæ habet Clavius ad 32 e 1) nempe bis tot angulis rectis, demptis quatuor, quot sunt figuræ latera; Ergo angulus quilibet $\frac{2N-4}{N}$ unius recti: hunc autem bisecat recta a centro; quæ igitur angulum cum perimetro facit $\frac{N-2}{N}$ unius recti, vel $1-\frac{2}{N}$; hoc est, angulum rectum dempto $\frac{2}{N}$ recti: Differentia igitur istius ab angulo recto tanto minor est, quanto numerus laterum major; cum igitur numerus laterum augeri possit in infinitum, ita & differentia istius anguli a recto in infinitum minui, in eadem semper ratione quâ numerus laterum augetur. Ideóq; in Polygono infinitorum laterum, istius anguli differentia ab angulo recto est infinitè parva, (nam si sit N infinitum, erit $\frac{2}{N}$ infinite parvum;) At, quod est infinitè parvum, illud est omni positivâ quantitate minus, ideóq; & non-quantum. Jam verò Polygonum infinitorum laterum, vel circulus est, vel saltem circulo inscriptibile: Si prius; erit igitur differentia anguli semicirculi ab angulo recto infinite parva: Si posterius; erit ea differentia adhuc minor, (nam latus polygoni circulo inscripti, cum extremitate diametri, angulum facit minorem quam facit peripheria cum eadem diametri extremitate, ideóq; magis

a recto deficit quam angulus Semicirculi.) Quod verò vel infinite parvum est, vel (si fieri posit) minus quà infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, adeoq; non-quantum. Angulus igitur contactûs, quæ est differentia anguli semicirculi ab angulo recto rectilineo, est non quantus. Quod erat demonstrandum.

2° Potest & idem pariter ostendi hoc modo. Si figuræ cujusvis regularis singula latera producantur (versus unam partem) fient tot anguli externi, quot sunt latera; quorum omnium aggregatum æquatur quatuor rectis (per ea quæ habet



Clavius ad 32 e 1) ideoq; eorum quilibet $\frac{1}{N}$ quatuor rectorum. Supponamus jam, ut prius, Polygonum infinitorum laterum; erit igitur istius angulus externus, ($A = \frac{4}{N}$ rectis) quatuor rectorum pars infinite parva, (nam si sit N infinita, erit $\frac{1}{N}$ infinite parvum.) Est autem hic angulus, vel ille angulus contactûs de quo loquimur (si nempe polygonum infinitorum laterum habeatur pro circulo,) vel saltem illo major (per 16 e 3:) Si prius dicatur, est angulus contactûs infinite parvus: Si posterius, est adhuc minor: At quod vel infinite parvum est, vel minus quàm infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, ideóq; non quantum. Est igitur angulus

lus contactûs non-quantus. Quod erat ostendendum.

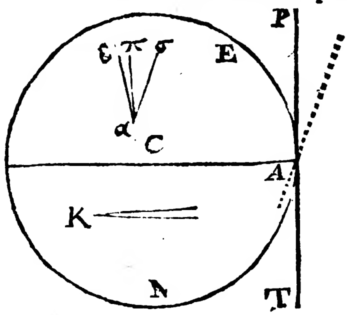
3° Quoniam magnitudo anguli tam externi A, quàm interni ejusve semissis C A L, æstimanda sit ex numero laterum, (ut ostensum est) adeóq; figuræ regulares eundem laterum numerum habentes habeant etiam ejusmodi angulos æquales: si concipiatur circulus ut Polygonum infinitorum laterum, concipienda sunt infinita latera unius circuli tot quot infinita illa latera alterius circuli (secus enim non essent circuli figuræ similes) & consequenter erunt tam anguli contactûs æquales quam anguli semicirculorum; (quod supra aliis argumentis contendimus:) Unde sequetur, Angulos contactûs esse non-quantos. ut supra etiam ostensum est.

4° Idem aliter sic patebit. Si a centro Polygoni regularis, (vel, quod idem est, circuli circumscripti,) ducatur recta ad Polygoni perimetrum duos utrinq; angulos æquales faciens, erit illa vel lateri perpendicularis, & C L, vel ad figuræ angulum ducta ut C A; (nam, sicubi alias ducatur, manifestum est angulos obliquos fieri, & inæquales.) Manifestum etiam est, differentiam rectarum C A, C L, semper minui, prout numerus laterum augetur, usq; dum tandem in Polygono infinitorum laterum, sive Circulo, sit vel infinite parva vel nulla: sed hoc obiter. Supponamus jam, ut prius, pro circulo Polygonum infinitorum laterum: quoniam autem radius cum peripheria angulos facit æquales, (ut manifestum est) concipiendus est vel ut recta C L (ad medium lateris) vel ut C A (ad angulum:) si priùs supponatur; erunt anguli recti, (nam recta a centro ad medium lateris Polygoni regularis angulos rectos facit;) Si posterius; saltem (cum omnes radii sint æquales, adeóq; C A, C L, æquales) erunt anguli C A L, C L A, æquales per 5 e 1; ideóq; & uterque rectus: (Angulus autem A C L nullus erit, sed ipsa crura A C, L C, coincident.) Utrumvis igitur supponatur, erit angulus semicirculi recto rectilineo æqualis; & propterea angulus contactus est non-quantus. Quod erat demonstrandum.

5° Subjungam huic argumento etiam hanc speculationem non absimilis naturæ. Si angulus contactus EAP sit vere angulus; tunc & residuus ad duos rectos erit vere angulus, nempe E A T, vel P A N, qui continetur rectâ tangente & peripheria semicirculi remotioris, puta T A & A E, vel P A & A N.

 neq;

neq; erunt lineæ T A, A E, aut P A, A N, in directum positæ, (nam lineæ in directum positæ non continent angulum, per



8 d 1.) At, hoc concesso, multo magis dicendum esset duas peripherias N A, A E, angulum continere; est enim curvatura N A E dupla curvaturæ T A E. quod si N A E non sit angulus, sed una linea continuata sive in directum posita, (prout concedi solet ab omnibus; quis enim dixerit in singulis peripheriæ punctis angulum formari?) neq; erit T A E vel P A N angulus, sed potius linea in directum posita; Et consequenter neq; P A E aut T A N angulus erit, sed potius lineæ coincidentes, quantum scilicet ad ipsum punctum contactus attinet.

Atq; hinc obiter discere licet, quo pacto duæ dissimiles lineæ, puta curva & recta, vel peripheria & parabola, vel etiam peripheriæ majoris & minoris circuli, aut etiam convexa & concava, &c. continuari possint. Quod monuisse sufficit.

6° Notum est, aream figuræ regularis quotcunq; laterum æqualem esse rectangulo quod semiperimetro & rectâ a centro ad perimetrum perpendiculari continetur; (sin recta illa non sit ad perimetrum perpendicularis, seu ad angulos rectos, secus erit,) At idem ostendit Archimedes, (prop. 1. de dimensione circuli,) de circulo; nempe aream circuli æqualem esse rectangulo sub radio & semiperipheria; Est igitur radius ad peripheriam perpendicularis, sive ad angulos rectos. Si enim angulus radio & peripheria comprehensus, minor esset recto rectilineo; esset area circuli minor quam ejusmodi parallelogrammum rectangulum. Nam illud quidem universaliter verum est; si duæ rectæ, quarum altera est semiperimeter figuræ regularis, altera recta ad latus ipsius quodlibet quocunq; angulo ducta, parallelogrammum eodem angulo contineant, erit hoc parallelogrammum areæ istius figuræ regularis æquale, (ut probari potest ex 35 e 1.) Cum igitur parallelogrammum radio (hoc est, recta a centro) & semiperipheria comprehensum, quod areæ

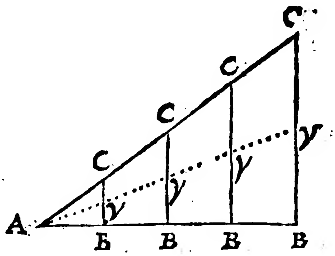
reæ circuli æquatur, sit rectangulum; manifestum est, & angulos quos illa recta a centro ad peripheriam facit, rectos esse & rectis rectilineis æquales. quod erat ostendendum.

CAP. XIII.

Argumentum quintum: ex proportione evanescente, deductum.

SEquitur aliud argumentum. Cui hoc Lemma præponendum est; [*Si duæ quantitates simul proportionaliter vel crescunt vel decrescunt; ubi earum una reducta est ad nihilum seu non-quantum, etiam & reliqua ad nihilum seu non-quantum reducitur.*

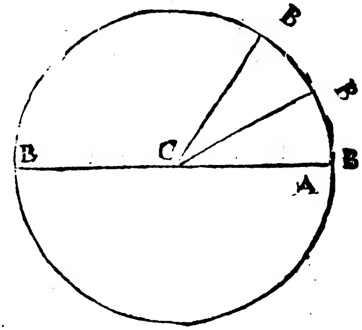
Exsemplum hoc esto. Rectæ A B, A C, angulum A utcunq; faciant; ipsiq; A B ubivis insistat B C angulum A B C rectum faciens (vel, si libet, alium ad libitum.) Jam si supponatur B C recta, super rectam A B moveri invariato angulo ABC; prout punctum B remotius vel propius distat a puncto A, in eadem ratione recta B C augetur vel minuitur, per 4 e 6. Quoniam igitur



AB . AB : : BC . BC proportionales sint, ubicunq; sumatur punctum B; si, inquam, punctum B sumatur idem quod A, adeóq; distantia A B nulla sit, (propter coincidentiam punctorum A, B,) etiam & longitudo lineæ B C nulla erit. Quod, si opus est, probari poterit ex 16 e 6. Et quidem licet alibi alia sit ratio rectæ A B ad BC quam ad B γ, tamen si B assignetur in ipso A, tam B C quam B γ similiter in punctum degenerant.

Exsemplum aliud hoc esto. Quoniam, si recta C B, manente centro C, circumvolvatur; angulus B C D, & peripheria

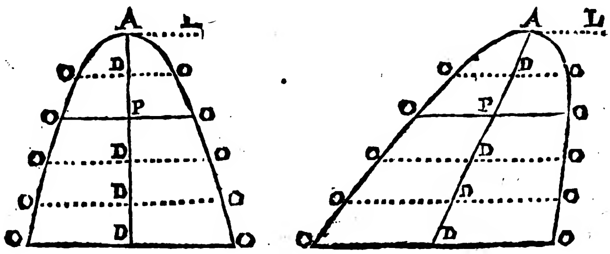
BA proportionaliter vel crescunt vel decrescunt, per 33 e 6: Ubi CB pervenerit ad situm CA, adeóq; (propter coincidentiam punctorum B, A,) peripheria evanescat, sive degeneret in punctum: etiam evanescit angulus BCA, & degenerat in non-angulum: Et, contra, ubi hoc fit, illud fiet. Quod etiam probari poterit, per 16 e 6.



Atq; idem pari modo fiet in aliis duabus quantitatibus quibusvis, quæ simul vel crescunt vel decrescunt proportionaliter. Prout liquet ex illa propositione 16 e 6. Quamvis enim ea speciatim de rectis lineis ab Euclide & affirmetur & demonstretur; attamen idem non minus verum esse de quibusvis quatuor proportionalibus nemo dubitat, cum idem subsit in omnibus fundamentum: unde notissima illa regula, quæ *Aurea* dici solet, originem ducit; quia nempe, ex quatuor proportinalibus, quod fit ex mutua multiplicatione mediorum, æquatur facto ex mutua multiplicatione extremorum. Ideóq; si mediorum alterum sit ciphra seu non-quantum, necesse est ut & extremorum alterum sit etiam ciphra seu non quantum: secus enim ea æqualitas factorum non prodibit.

Imò idem etiam omnino accidit, non modò ubi eadem est utriusq; quantitatis crescendi & decrescendi ratio, sed etiam ubi incrementi & decrementi ratio in una quantitate est rationis quæ in alia quantitate reperitur, duplicata vel triplicata (vel alio etiam aliquo modo immutata:) ut liquet in Parabola. Quoniam enim ordinatim applicatæ in eadem Parabolâ crescunt & decrescunt, non quidē in eadem ratione cum diametris, sed in subduplicata ratione diametrorum: ideo tamen, ubi harum alterutra redigitur ad non-quantum, etiam reliqua ad non-quantum redigetur. Verbi gratiâ, Quoniam in Parabolâ AO prout Diametri punctum D aliud atq; aliud assumitur ita tam Diameter AD, quam ordinatim applicata OD; bre-

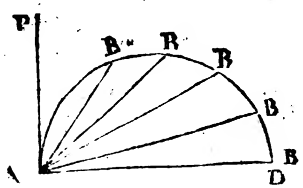
vior est aut longior; non tamen utraq; in eâdem ratione, sed



altera in alterius ratione duplicatâ; sunt enim diametri ad invicem, non ut ipsæ ordinatim-applicatæ, sed ut ordinatim-applicatarum quadrata, (prout notum est ex principiis Conicis,) nempe AD . AD : : ODq ODq. Si tamen punctum D assignetur in ipso Parabolæ vertice A, adeo ut intercepta diameter AD nulla sit (propter coincidentiam punctorum A, D,) etiam & ordinatim-applicata OD nulla erit, sive nullius longitudinis; ut patet.

Sed & idem eveniet in Hyperbola, vel Ellipsi, aliâve ejusmodi curvâ; ubi tamen ratio diametri ad ordinatim-applicatas magis adhuc est intricata. Adeo ut Lemmatis veritas abundè constet.

His positis, sic procedit argumentum. Sit recta PA extremo diametri AD perpendicularis, adeóq; peripheriam ABD contingens in puncto A; unde recta AB (quantum opus est extensa) concurrat cum peripheriâ ubivis in B: circumducta jam recta AB secabit peripheriam in variis successivè punctis quorum quovis B insigniatur: semper autem, hoc transitu, peripheria BA & angulus rectilineus BAP proportionaliter simul tam crescunt quam decrescunt, per 32 e 3 & 33 e 6. Ideoq;, ubi punctum B ad ipsum A pervenerit,



rit, adeoq; peripheria B A evanescat & nullius evadat magnitudinis, simul etiam angulus B A P evanescet & nullus fiet, sive nullius magnitudinis. Est autem, hoc in casu, angulus ille B A P, vel ipse angulus contactus, vel saltem non ipso minor; Ergo angulus contactûs nullius est magnitudinis, sive non-angulus. Quod erat demonstrandum.

CAP. XIV.

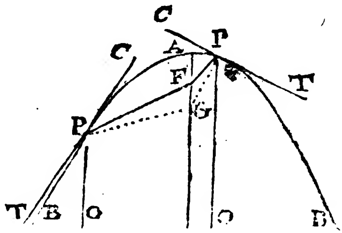
Argumentum sextum, Ex Opticis petitum, & Sectionibus Conicis.

MOnet hic tandem Clavius, & quidem recte, *Id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, docetur; verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur: Ut enim demonstrat Apollonius Pergæus lib.* 1. *prop.* 32. *In locum, qui inter coni sectionem & rectam lineam tangentem interjicitur, altera recta linea non cadit: Atq; adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitatur perpendicularis) omni acuto rectilineo major.* Hoc ego quidem tanquam verissimum agnosco, non modò de sectionibus conicis, sed & aliis quibusvis curvis: nempe angulum contactus, qui ad illas efficitur, minorem esse omni angulo acuto, utpote qui sit non-angulus; reliquum verò ad rectum, majorem esse omni acuto rectilineo, est enim rectus, & recto rectilineo æqualis: est enim hic eadem ratio quæ in circulo. At hic, inquit, *major absurditas apparet, quoad sensum, in eâ Ellipsi quæ perexiguam habet latitudinem, & in ea Hyperbolâ quæ ferè linea recta esse videatur: valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipsis & Hyperbolæ constituti.* Verum ego neq; majorem absurditatem neq; omnino ullam hic conspicio. Quamvis enim crurum divaricatio extra punctum contactus varia videatur; in ipso tam contactus puncto non est varia linearum inclinatio, nec quidem omnino ulla. Et, si nihil absurdi sit, lineas contiguas in ipso contactus puncto, æqualiter omnes *distare*, (hoc est, non omnino,) licet extra illud punctum earum distantiæ (pro varia ipsarum divaricatione) variæ sint; cur magis absurdum esset, earum omnium *inclinationes*, in puncto contactûs, æquales esse (hoc est, nullas) licet alibi sint admodum inæquales? Aut etiam

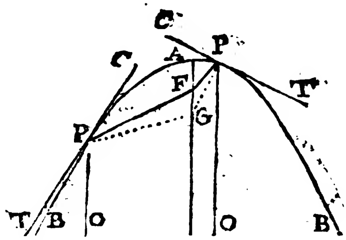
tiam (quoniam ad sensus judicium fit provocatio) cur magis incredibile existimem, acutam illam Ellipsin, & obtusam Hyperbolam, in ipsis contactuum punctis, ad rectas tangentes pariter non-inclinari, quamvis postea varie divaricentur; quam, easdem pariter suas rectas non nisi in unico puncto contingere? Nam & hoc sensui non magis credibile videbitur; neq; tamen Clavius, credo, negaret.

Quoniam verò de contactibus in Coni sectionibus mentionem facit Clavius; videbimus & illic omnia nostræ sententiæ consentanea. Instantiam desumam ex opticis; quæ hæc esto.

Tradit Vitellio, lib. 5. prop. 2. *Angulos incidentiæ & reflexionis, æquales invicem esse, in speculis quibuscunq;, sive planis sive concavis sive convexis:* Atq; illud etiam agnoscunt Optici omnes. Sed & idem Vitellio, lib. 9. pr. 43. ostendit, *In speculo concavo parabolico radios omnes, qui in illud ubivis incidunt axi paralleli, ad unicum idemq; punctum, qui Focus dici solet, reflecti:* Quod & post illum agnoscunt alii Optici. Hoc autem ut demonstret, ostendit, ex Apollonio, lineam incidentiæ, & lineam reflectionis ad focum, angulos æquales cum rectâ contingente facere. Verbi gratiâ. Sit punctũ objecti, O unde ad speculi punctum P ducatur recta OP, axi parallela: inde autem ad focum PF: Erunt anguli OPT, FPC, (cum recta tangente CPT facti) æquales; ut Vitellio ex Apollonio demonstrat; ideoq;, inquit, reflexio fiet ad punctum F: atq; idem fiet quodcunq; sit punctum speculi P, in quod radius OP axi parallelus inciderit. At oportuit ostendisse, non tam angulos OPT, FPC, ad contingentem factos, æquales esse; quàm OPB, FPA, ad speculum factos, æquales esse; angulum nempe incidentiæ & reflectionis in speculo. Vel igitur æqualitas angulorum ad rectam contingentem, eandem infert æqualitatem angulorum ad speculum; vel demonstratio non procedit. Cùm igitur demonstratio hæc pro legitima solet, quod sciam, ab omnibus haberi; dicendum est eandem utrobiq; esse æqualitatem. Ideóq; cùm æquales sint tam OPT,



F P C, anguli ad contingentem, quam O P B, F P A, anguli ad speculum; erunt etiam (per 3 axioma primi Euclidis) anguli C P A, T P B, vel æquales, vel potius nulli. At manifestum est etiam, crura cruribus non utraq; congruere; nam si angulus alter alteri superponatur, quamvis congruere possint crura P T, P C, attamen P B, P A, non congruent, neq; alterum



in altero jacebit, sed tota P B, solo puncto B excepto, cadet inter ipsas P C, P A, ut nemo non concedet, qui Parabolæ naturam satis intelligit. Unde etiam manifesto liquet, crura illa, quæ, extra punctum concursus, variè divaricantur, posse tamen æquales angulos continere.

Verum siquis diceret (contra Vitellionem, aliósq; Opticos) Radium O P, non reflecti ad punctum F præcise (quamvis ad illud quam proximè) eò quod existimet angulum O P B, angulo F P A, non præcisè æqualem, sed aliquantillo majorem, propterea quod angulus ablatus B P T, angulo ablato A P C, minor videatur: Sic refutandi erunt. Si non ad punctum F fiat reflexio; esto, si fieri possit, ad punctum aliud aliquod inferius in axe assignandum, (nam ad aliquod saltem axis punctum reflexionem fieri, nemo dubitabit,) sitq; illud punctum G, ut tandem angulus reflexionis A P G, fiat æqualis angulo incidentiæ O P B Erit ergo angulus rectilineus F P G, differentia angulorum F P A, G P A, seu F P A, O P B, adeoq; angulorum A P C, B P T; quod fieri non potest, cum sit horum utervis omni angulo rectilineo possibili minor: non potest enim alia recta inter rectam contingentem & coni sectionem cadere, per 32 lib. 1. Apol. Non ergo fit reflexio ad G, ergo ad F; ideóq; tam anguli A P F, B P O, quam G P F, T P O, sunt æquales; ideóq; A P C, B P T vel saltem æquales, vel potius

tius nulli. Idem igitur & de angulis contactuum in Conicis sectionibus verum est non minus quàm in circulis. Sed & argumentorum præcedentium aliquot de sectionibus conicis, aliisve curvis, pariter atq; de circulis concludunt.

Postquam hoc totum negotium absolveram, admonuit me (quod ante nesciebam) Clarissimus vir D. *Sethus Ward*, apud nos Astronomiæ Professor *Savilianus*, dignissimus Collega meus, Cabbæum, in libro suo de Meteoris, Vitellionis demonstrationem ut minus sufficientem improbasse, ea quidem de causa quam & ego jam innui; adeò ut eam quam subjunxi confirmationem non omnino inutilem fuisse, sed plane necessariam, jam reperiam.

CAP. XV.

Clavii Corollariis respondetur.

DEniq; mysteria aliquot hic adjungit Clavius, quasi ex Euclidis propositione, prout ab ipso est intellecta, emergentia. Ut illud Gardani;

Potest aliqua quantitas continuè & infinitè augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunq; sit, minus semper erit decremento hujus: propterea nempe quod angulus contactus quantumvis multiplicatus, minor sit angulo quovis rectilineo quantumvis diminuto.

Item illud ex Campano; *Transiri posse a minori ad majus, vel contra, & per omnia media, nec tamen per æquale.* Quod tantundem est acsi diceret, erectum quemvis in plano Horizontali stantem, posse dextrorsum ab Oriente ad Occidentem faciem convertere nec tamen interim ad Meridiem conversam habeat.

At hæc, & siqua sunt similia, cùm aliud non habeant fundamentum, quàm quòd supponant, *Angulum contactus vere quantitatem esse*, ulteriore refutatione non indigent. Sufficit enim demonstrasse, (quod abunde factum esse judico.) *Angulum contactus esse non-angulum*, seu *non-quantum*; & propterea, *Angulum Semicirculi æqualem esse recto rectilineo.*

INDEX CAPITUM

In Tractatu Præcedente.

XII.

XII. *Argumentum quartum, (ſeu argumentorum claſſis quarta, ſex distinctis argumentis conſtans,) hinc deſumitur, quoniam, Quod omni poſitivâ quantitate aſſignabili minus eſt, eſt non-quantum.*

XIII. *Argumentum quintum; ab evaneſcente proportione deſumptum.*

XIV. *Argumentum ſextum; ex Opticis petitum, & ſectionibus Conicis.*

XV. *Clavii corollariis reſpondetur.*

FINIS.